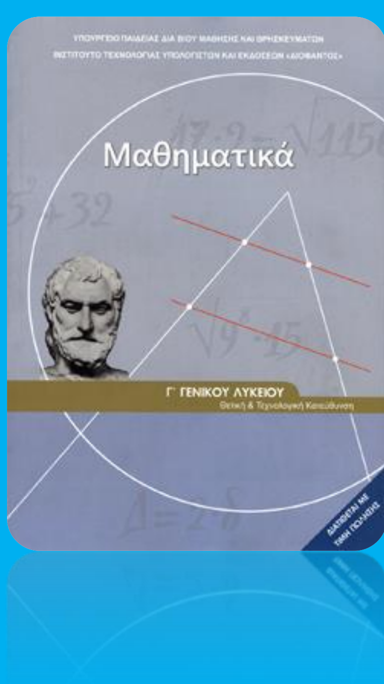
ΛΥΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΤΕΤΑΡΤΗ

16 Ιουνίου 2021



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

lisari team

ΛΥΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021

1η έκδοση

Αντωνόπουλος Νίκος
Βελαώρας Γιάννης
Βοσκάκης Σήφης
Γκριμπαβιώτης Πάνος
Μανώλης Ανδρέας
Παγώνης Θεόδωρος
Παπαμικρούλης Δημήτρης
Ποδηματάς Θωμάς

Συντονισμός

Χατζόπουλος Μάκης

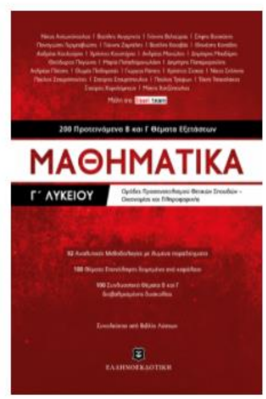
Οι απαντήσεις - λύσεις είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς των μελών της **lisari team**

2η έκδοση: 16 – 6 – 2021 *(συνεχής ανανέωση)*

Οι λύσεις διατίθεται ***αποκλειστικά***

από το μαθηματικό **blog**

lisari.blogspot.com



Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο περιλαμβάνονται οι λύσεις των Πανελλαδικών Εξετάσεων 2021 στο μάθημα **Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής.** Η παρουσίαση των λύσεων είναι πλήρης και αναλυτική στο μέγιστο δυνατό, προκειμένου οι μαθητές να μπορούν να μελετήσουν και να επεξεργαστούν εύκολα το αρχείο.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε αποκλειστικά από τη γνωστή **διαδικτυακή ομάδα Μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος, τη **lisari team.** Φέτος εστιάσαμε στη ποικιλία των λύσεων και όσο στο χρόνο που θα αναρτηθούν οι λύσεις.

Την αρχική συγγραφή των λύσεων ακολούθησαν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις με στόχο μια **πληρέστερη και πιο ποιοτική παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες που ενδεχομένως θα έχουν διαφύγει της προσοχής μας, γεγονός αναπόφευκτο δεδομένων των στενών χρονικών περιθωρίων. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου η εν λόγω παρουσίαση θα βελτιωθεί, ίσως εμπλουτιστεί και με εναλλακτικές λύσεις. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις επί των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

lisari **team**

16 Ιουνίου 2021

lisari team

1. Αντωνόπουλος Νίκος (3º ΓΕΛ Άργους)
2. Αυγερινός Βασίλης (Φροντιστήριο "Διάταξη" - Ν. Σμύρνη)
3. Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο "Βελαώρας" - Λιβαδειά Βοιωτίας)
4. Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο "Ευθύνη" - Ρέθυμνο)
5. Γιαννόπουλος Μιχάλης (Θεσσαλονίκη - Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)
6. Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο "Λύση" - Άρτα)
7. Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)
8. Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια "Πουκαμισάς" Γλυφάδας)
9. Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο "Ώθηση" - Μαρούσι)
10. Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο "Παπαπαναγιώτου – Κάκανος" - Σέρρες)
11. Κανάβης Χρήστος (Διδακτορικό στο ΕΜΠ – Αναπληρωτής)
12. Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)
13. Κουλούρης Ανδρέας (3ο ΓΕΛ Γαλατσίου)
14. Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο "Στόχος" - Περιστέρι)
15. Κοπάδης Αθανάσιος (Φροντιστήριο 19+ στο Πολύγωνο)
16. Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο "Ρηγάκης" - Κοζάνη)
17. Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)
18. Μπαδέμης Δημήτρης (Φροντιστήριο "Πουκαμισάς" - Γλυφάδας)
19. Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)
20. Νικολόπουλος Αθανάσιος (2ο ΓΕΛ, Ζάκυνθος)
21. Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο "Εις τη ν" - Αγρίνιο)
22. Παπαδομανωλάκη Μαρία (Καθηγήτρια Μαθηματικών - Ρέθυμνο)
23. Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός "Ρόμβος")
24. Ποδηματάς Θωμάς (Σπουδαστήριο Μαθηματικών Θωμάς και Ρόζα Ποδηματά - Βόλος)
25. Πολύζος Γιώργος (τ. πάρεδρος στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, συγγραφέας)
26. Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)
27. Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο "Μπαχαράκης" - Θεσσαλονίκη)
28. Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1ο Λύκειο Χαλκίδας)
29. Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο "Ορίζοντες" - Ηράκλειο Κρήτης)
30. Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)
31. Σταυρόπουλος Σταύρος (Πρόεδρος Ε.Μ.Ε Κορινθίας - ΓΕΛ Ζευγολατιού)
32. Τσακαλάκος Τάκης (συνταξιούχος αλλά ενεργός μαθηματικός)
33. Χαραλάμπους Σταύρος (Διάθεση Δ ΠΥΣΔΕ Αθήνας)
34. Χασάπης Γεώργιος (Ιδιωτικός υπάλληλος)
35. Χατζόπουλος Μάκης (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)

lisari team / Σχολικό έτος 2020 – 21
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΟΚΤΩ (8)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. (Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 135)

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή, $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Α2. (Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 51)

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$

τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Α3. (Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 23)

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$

Α4. α) Σ β) Λ (το σωστό είναι $x \in f(A)$) γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Επειδή $f(x+1)=(x+1)e^{-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θέτουμε όπου x το $x-1$ άρα:

$$f(x)=xe^{1-x}.$$

Β2. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε: $f'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}=(1-x)e^{1-x}$.

Το πρόσημο της $f'(x)$ και η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
e^{1-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	Τ.Μ. $f(1)=1$	$\searrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ διότι $f'(x)>0$ για $x\in(-\infty,1)$ και είναι συνεχής στο $(-\infty,1]$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ διότι $f'(x)<0$ για $x\in(1,+\infty)$ και είναι συνεχής $[1,+\infty)$.

Έχει τοπικό μέγιστο για $x=1$ το $f(1)=1$.

Β3. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f''(x)=-e^{1-x}-(1-x)e^{1-x}=e^{1-x}(-1-1+x)=(x-2)e^{1-x}$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
e^{1-x}		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	Σ.Κ. $\left(2,\frac{2}{e}\right)$	$\smile$	

Η f είναι κοίλη στο $x \in (-\infty, 2]$ και κυρτή για $x \in [2, +\infty)$. Η C_f παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = 2$ το σημείο $\left(2, \frac{2}{e}\right)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Έχουμε,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1-x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \underset{DHL}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{x-1}}\right) = 0$$

η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 0$.

Επίσης,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$$

άρα η C_f δεν έχει πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

B4. (i) Είναι,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(xe^{1-x}\right) = -\infty$$

διότι $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} e^{1-x} \underset{u\to-\infty}{\overset{u=1-x}{=}} \lim_{u\to+\infty} e^u = +\infty$.

Έστω $A_1 = (-\infty, 1]$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής άρα

$$f(A_1) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 1]$$

και $A_2 = (1, +\infty)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής άρα

$$f(A_2) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to1^+} f(x)\right) = (0, 1).$$

Επομένως,

$$f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1]$$

Άρα σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, 1]$.

(ii) Για την εξίσωση $f(x) = \lambda \ (1)$ έχουμε,

- Αν $\lambda \le 0$ τότε $\lambda \in f(A_1)$ και $\lambda \notin f(A_2)$ άρα η εξίσωση (1) έχει μία ρίζα.
- Αν $0 < \lambda < 1$ τότε $\lambda \in f(A_1)$ και $\lambda \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες.
- Αν $\lambda = 1$ τότε $\lambda \in f(A_1)$ και $\lambda \notin f(A_2)$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα τη $x = 1$.
- Αν $\lambda > 1$ τότε $\lambda \notin f(A_1)$ και $\lambda \notin f(A_2)$ άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η αx^3-3x^2-x+1 είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική άρα και στο $(-\infty,0]$. Η συνx είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ ως τριγωνομετρική, άρα και στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$. Επίσης,

- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\alpha x^3-3x^2-x+1\right)=1$
- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\text{συν}x=1$
- $f(0)=1$

άρα η f είναι συνεχής και στο $x_0=0$, επομένως είναι συνεχής στο $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ακόμα,

- $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\alpha x^3-3x^2-x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x\left(\alpha x^2-3x-1\right)}{x}=-1$
- $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\text{συν}x-1}{x}=0$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Γ2. (i) Έχουμε,

- η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$.
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=-\text{ημ}x$
- $f(0)=1$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\text{συν}\frac{3\pi}{2}=0$ άρα $f(0)\neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Επομένως, η συνάρτηση f δεν ικανοποιεί την τρίτη προϋπόθεση του θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$.

(ii) Για $\xi\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε,

$$f'(\xi)=0\Leftrightarrow-\text{ημ}\xi=0\Leftrightarrow\text{ημ}\xi=0\overset{\xi\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow}\xi=\pi.$$

Γ3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0<0$ είναι

$$f'(x_0)=3\alpha x_0^{\,2}-6x_0-1$$

Όμως, το τριώνυμο $3\alpha x_0^{\,2}-6x_0-1$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=36+12\alpha=12(3+\alpha)<0 \text{ εφόσον } \alpha<-3,$$

άρα

$$f'(x_0)<0 \text{ για κάθε } x_0 \in (-\infty,0) \text{ δηλαδή } f'(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x<0.$$

Επομένως, στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Γ4. Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)=3\alpha x^2-6x-1<0$.

Για κάθε $0<x\leq \frac{3\pi}{2}$ είναι $f'(x)=-\eta\mu x$.

Το πρόσημο της $f'(x)$ και η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$	‖ $-$	0	$+$
f	$\searrow$			$\nearrow$

Άρα η f είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\pi]$, αφού f συνεχής στο $(-\infty,\pi]$ και ισχύει $f'(x)<0$ στο $(-\infty,0)\cup(0,\pi)$
- γνησίως αύξουσα στο $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ αφού f συνεχής στο $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ και ισχύει $f'(x)>0$ στο $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$.

Έχουμε για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$,

$$x<\pi \Leftrightarrow f(x)>f(\pi)\Leftrightarrow f(x)>-1$$
$$x>\pi \Leftrightarrow f(x)>f(\pi)\Leftrightarrow f(x)>-1$$

Για $x=\pi$ ισχύει

$$f(x)=f(\pi)\Leftrightarrow f(x)=-1$$

Άρα ισχύει $f(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$K(x)=\ln x-\frac{1}{x} \text{ με } x>0.$$

Η $K(x)$ είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως διαφορά συνεχών και

$$K(1)=-1<0\ ,\ K(e)=1-\frac{1}{e}>0$$

άρα

$$K(1)K(e)<0$$

οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,e)$ τέτοιο, ώστε:

$$K(x_0)=0 \text{ δηλαδή } \ln x_0 = \frac{1}{x_0}.$$

Επιπλέον,

$$K'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0 \text{ για κάθε } x>0$$

οπότε η K είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Δ2. Είναι,

$$f(x)=(\ln x_0)(x+1)-\ln x-1,\ x>0.$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με :

$$f'(x)=\ln x_0-\frac{1}{x} \text{ και } f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$$

άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Οπότε,

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=f'(x_0) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} x=x_0$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(x_0) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} x>x_0$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x)<f'(x_0) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} x<x_0$

Το πρόσημο της $f'(x)$ και η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,x_0]$, συνεπώς παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση x_0, το

$$f(x_0)=(\ln x_0)(x_0+1)-\ln x_0-1=x_0\ln x_0+\cancel{\ln x_0}-\cancel{\ln x_0}-1=0,$$

διότι από ερώτημα Δ1 έχουμε:

$$\ln x_0=\frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0\ln x_0=1.$$

Δ3. Αρχικά θα δείξουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των g και h έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Για $x \le 0$ είναι

$$g(x)\le 0<h(x)$$

άρα η εξίσωση $g(x)=h(x)$ είναι αδύνατη.
Για $x>0$ έχουμε:

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow xe^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow xe^{-x}=\frac{x_0^{x+1}}{e^{x+1}}\Leftrightarrow xe^{-x}e^{x+1}=x_0^{x+1}\Leftrightarrow xe=x_0^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \ln(xe)=\ln x_0^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \ln x+\ln e=(x+1)\ln x_0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x_0)(x+1)-\ln x-1=0$$

$$\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$$

διότι από το Δ2 ερώτημα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=x_0$ το $f(x_0)=0$.

Α΄ τρόπος (αναλυτικά)
Για να έχουν οι g και h κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο αρκεί να δείξουμε ότι

$$g'(x_0)=h'(x_0)$$

Έχουμε,

$$g'(x)=\left(xe^{-x}\right)'=e^{-x}-xe^{-x}$$

και

$$h'(x)=\left[\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\right]'=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\left[\ln x_0-1\right]\overset{(\Delta_1)}{=}\frac{x_0^x\cdot x_0}{e^x\cdot e}\left(\frac{1}{x_0}-1\right)=\frac{x_0^x(1-x_0)}{e^x\cdot e}$$

Οπότε

$$g'(x_0)=h'(x_0)\Leftrightarrow e^{-x_0}-x_0e^{-x_0}=\frac{x_0^{x_0}(1-x_0)}{e^{x_0}\cdot e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x_0}{e^{x_0}}=\frac{x_0^{x_0}(1-x_0)}{e^{x_0}\cdot e}$$

$$\overset{x_0\in(1,e)}{\Leftrightarrow} x_0^{x_0}=e\Leftrightarrow \ln x_0^{x_0}=\ln e$$

$$\Leftrightarrow x_0\ln x_0=1$$

$$\overset{(\Delta 1)}{\Leftrightarrow} x_0\frac{1}{x_0}=1$$

Β΄ τρόπος
Για κάθε $x>0$ θα λύσουμε την εξίσωση:

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow \ln g(x)=\ln h(x)\Leftrightarrow \ln h(x)-\ln g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0$$

Για τη συνάρτηση

$$f(x)=\ln h(x)-\ln g(x),\ x>0$$

έχουμε:

$$f(x_0)=0\Leftrightarrow g(x_0)=h(x_0)$$

και από το ακρότατο της f στο x_0 έχουμε:

$$f'(x_0)=0\Leftrightarrow \frac{h'(x_0)}{h(x_0)}-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)}=0\Leftrightarrow \frac{h'(x_0)}{h(x_0)}=\frac{g'(x_0)}{g(x_0)}\overset{g(x_0)=h(x_0)}{\Leftrightarrow} g'(x_0)=h'(x_0).$$

Συνεπώς έχουμε ότι $g(x_0)=h(x_0)$ και $g'(x_0)=h'(x_0)$ άρα οι γραφικές παραστάσεις των g και h έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.

Δ4. Η (κατακόρυφη) απόσταση των Α και Β είναι:

$$G(x)=|f(x)-\varphi(x)| \text{ και } f(x)>\varphi(x), \text{ για κάθε } x>0,$$

άρα

$$G(x)=f(x)-\varphi(x),\ x>0$$

- Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε και η G είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με

  $$G'(x_0)=f'(x_0)-\varphi'(x_0)$$

  όπου στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ παρουσιάζει ελάχιστο, από το θεώρημα του Fermat, θα ισχύει ότι :

  $$G'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)-\varphi'(x_0)=0 \Leftrightarrow \varphi'(x_0)=f'(x_0) \ (1)$$

  Όμως η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, άρα $f'(x_0)=0$. Από τις ισότητες (1) και (2), προκύπτει ότι:

  $$\varphi'(x_0)=0$$

  που σημαίνει ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.
- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.