ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΣΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Τετάρτη, 18/05/2016

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής

Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της *f*.

Απάντηση

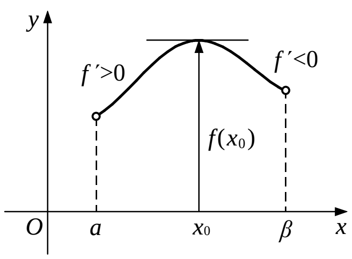
Θεωρία, στη σελίδα 262 του σχολικού βιβλίου.

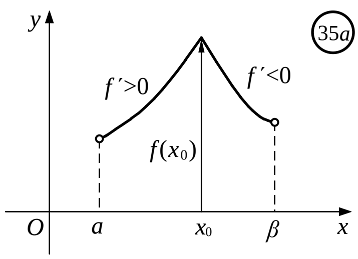
Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in(\alpha,x_0]. \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in[x_0,\beta). \qquad (2)$$





Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ x\in(\alpha,\beta)\ ,$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Θεωρία, στη σελίδα 141 του σχολικού βιβλίου.

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

● έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α **και**

● για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία

Θεωρία, στη σελίδα 246 του σχολικού βιβλίου.

Απάντηση

Διατύπωση

Αν μια συνάρτηση f είναι:

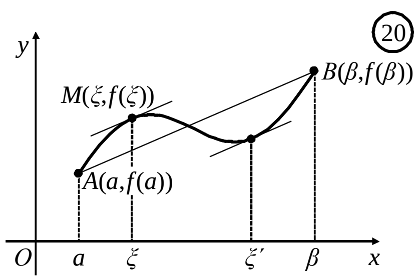
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή*** *ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

Απαντήσεις

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε το $\int_a^\beta f(t)dt = G(a)-G(\beta)$

Λάθος (διότι είναι $\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$)

β) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Σωστό (πρόταση στη σελίδα 166 του σχολικού βιβλίου).

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Λάθος. (Η αντίστοιχη πρόαταση δεν ισχύει γενικά σε ένωση διαστημάτων)

δ) Μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της , η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

Σωστό (γνωστή πρόταση –σχόλιο στο σχολικό βιβλίο).

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m

Σωστό (θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, σελίδα 195 σχολικό βιβλίο)

ΘΕΜΑ 2ο

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\left(x^2+1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}, x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}>0 \Leftrightarrow x>0$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}<0 \Leftrightarrow x<0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 η συνάρτηση f είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$
- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,0\right]$
- Έχει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο 0 , το $f(0)=0$

Ο πίνακας μεταβολών-μονοτονίας της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	0 $+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$

Ολ. ελάχιστο

B2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f''(x)=\frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3},\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3}=0 \Leftrightarrow 1-3x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3}>0 \Leftrightarrow 1-3x^2>0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3}<0 \Leftrightarrow 1-3x^2<0 \Leftrightarrow \left(x>\frac{\sqrt{3}}{3}\ \acute{\eta}\ x<-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

- Κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\ +\infty\right)$

- Κυρτή στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

Έχει σημεία καμπής τα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$

Ο πίνακας μεταβολών-κυρτότητας της f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $+\infty$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

B3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε **δεν** έχει **κατακόρυφη** ασύμπτωτη ($\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$).

<u>Πλάγιες-οριζόντιες:</u> $y = \lambda x + \beta \ (\lambda, \beta \in \mathbb{R})$ με:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \lambda x\right] = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

Επομένως η C_f **έχει οριζοντια ασύμπτωτη στο** $+\infty$ την $y = 1$.

Ακόμα:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - \lambda x\right] = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

Επομένως η C_f **έχει οριζοντια ασύμπτωτη στο** $-\infty$ την $y = 1$

<u>Παρατηρήσεις:</u>

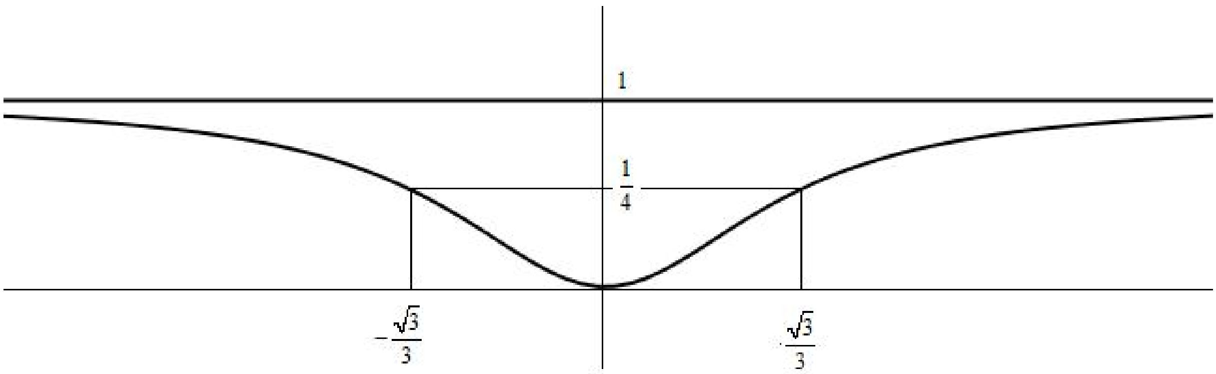
1.Μπορούμε να παρατηρήσουμε (και να αποδείξουμε) ότι η συνάρτηση f είναι άρτια και άρα θα έχει την ίδια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$, αποφεύγοντας έτσι να ξαναβρούμε τα παραπάνω όρια στο $-\infty$.

2. Μπορούμε επίσης να βρούμε την οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ **και να δικαολογήσουμε ότι μια συνάρτηση** f δεν μπορεί να έχει ταυτόχρονα και πλάγια και οριζόντια (άρα δεν θα έχει πλάγια ασύμπτωτη).

Β4. Συνοπτικά ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad +\infty$
$f''(x)$	-	+	+	-
f'	-	-	+	+
$f(x)$	$\downarrow \cap$	$\downarrow \cup$	$\uparrow \cup$	$\uparrow \cap$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f (αφού λάβουμε και υπόψη μας ότι είναι άρτια) είναι η επόμενη:



Σημείωση: Για την σωστή παρουσίαση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι χρήσιμο να παρατηρ'ησουμε ότι αυτή είαι άρτια και θετική ($f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $x = 0$, δηλαδή να διέρχεται από το Ο(0,0).

ΘΕΜΑ 3$^{\text{ο}}$

Γ1. Η εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ έχει προφανή ρίζα το $x_0 = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x - 2x = 2x \cdot \left(e^{x^2} - 1\right),\ x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x\cdot\left(e^{x^2}-1\right)=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x\cdot\left(e^{x^2}-1\right)>0 \Leftrightarrow x>0$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow 2x\cdot\left(e^{x^2}-1\right)<0 \Leftrightarrow x<0$$

$$x^2>0 \Leftrightarrow e^{x^2}>e^0 \Leftrightarrow e^{x^2}>1 \Leftrightarrow e^{x^2}-1>0, x\in\mathbb{R}$$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	0 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$

Επομένως η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$ και άρα:

$f(x)\ge f(0) \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\ge 0$ (η ισότητα ισχύει μόνο στο $x=0$, αφού στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ είναι γνησίως μονότονη άρα και «1-1»)

2^ος^ Τρόπος

Από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (εφαρμογή 2/ii στη σελίδα 266 γνωρίζουμε ότι:

$$\ln x\le x-1, \text{ για κάθε } x>0 \text{ (η ισότητα ισχύει για } x=1)$$

Θέτοντας όπου x το $e^{x^2}>0$ (για κάθε $x\in\mathbb{R}$) έχουμε:

$$\ln e^{x^2}\le e^{x^2}-1 \Leftrightarrow x^2\le e^{x^2}-1 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\ge 0 \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

$$\text{(η ισότητα ισχύει για } e^{x^2}=1 \Leftrightarrow e^{x^2}=e^0 \Leftrightarrow x=0).$$

3^ος^ Τρόπος

Μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x-x-1,\ x\in\mathbb{R}$, να μελετήσουμε την μονοτονία και τα ακρότατά της και να πάρουμε $g(x)\ge g(0) \Leftrightarrow g(x)\ge 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να πάρουμε τώρα $g(x^2)\ge 0 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\ge 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ2. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2 \Leftrightarrow |f(x)|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right| \Leftrightarrow |f(x)|=e^{x^2}-x^2-1, x\in\mathbb{R}$$

(Επειδή, από το προηγούμενο ερώτημα: $f(x)\ge f(0) \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\ge 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$).

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και δεν έχει ρίζες σε αυτά διότι αν υποθέσουμε ότι έχει μία ρίζα $\rho\in(-\infty,0)$ ή $\rho\in(0,+\infty)$, τότε θα είναι από το θεώρημα του Fermat (που πληρούνται οι προϋποθέσεις του) ότι $f(\rho)=0$. Οπότε έχουμε:

$$|f(\rho)|=0 \Leftrightarrow e^{\rho^2}-\rho^2-1=0 \Leftrightarrow \rho=0$$

άτοπο.

Επομένως η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

Άρα έχουμε τις περιπτώσεις:

$$\begin{aligned}
&x>0,\ f(x)>0 \Rightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1\\
&x>0,\ f(x)<0 \Rightarrow f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)\\
&x<0,\ f(x)<0 \Rightarrow f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)\\
&x<0,\ f(x)>0 \Rightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1
\end{aligned}$$

Επειδή οι ζητούμενες συναρτήσεις πρέπει να είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ (και στο 0 με $f(0)=0$) θα έχουμε:

- $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$ ή
- $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right),\ x\in\mathbb{R}$ ή
- $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0\\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x<0\end{cases}$ ή
- $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x<0\\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x\geq 0\end{cases}$

Γ3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξειων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x)=e^{x^2}\cdot 2x-2x=2x\cdot\left(e^{x^2}-1\right),x\in\mathbb{R}$$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με

$$f''(x)=4x^2e^{x^2}+2\left(e^{x^2}-1\right)>0 \text{, για κάθε } x\in(-\infty,0) \text{ και για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

(αφού $x^2e^{x^2} \geq 0$ και $e^{x^2} - 1 > 0$)

Επειδή η f' είναι συνεχής στο 0 (αφού είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων) η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$, δηλαδή σε όλο το $\mathbb{R}$.

Γ4. Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x+3) - f(x), x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$g'(x) = f'(x+3) - f'(x) > 0, x \in \mathbb{R}$$

αφού $x+3 > x \Rightarrow f'(x+3) > f'(x)$ (η f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, διότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$)

Έχουμε διαδοχικά για $x > 0$:

$$|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow g(|\eta\mu x|) < g(x) \Leftrightarrow f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) < f(x+3) - f(x)$$

Επομένως μοναδική λύση της δοθείσας εξίσωσης είναι η $x = 0$

<u>2ος Τρόπος</u>

Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x = 0$

Εξετάζουμε τις επόμενες περιπτώσεις ($x > 0$):

1η περίπτωση) Αν $|\eta\mu x| + 3 > x$, τότε προκύπτει η διάταξη $|\eta\mu x| < x < |\eta\mu x| + 3 < x + 3$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x, |\eta\mu x|]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[x, |\eta\mu x|]$ (επομένως και συνεχής στο $[x, |\eta\mu x|]$).

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_1 \in (|\eta\mu x|, x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(|\eta\mu x|)}{x - |\eta\mu x|} \quad \text{(I)}$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[|\eta\mu x| + 3, x + 3]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[|\eta\mu x| + 3, x + 3]$ (επομένως και συνεχής στο $[|\eta\mu x| + 3, x + 3]$).

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_2 \in (|\eta\mu x| + 3, x + 3)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x+3)-f(|\eta\mu x|+3)}{(x+3)-(|\eta\mu x|+3)}=\frac{f(x+3)-f(|\eta\mu x|+3)}{x-|\eta\mu x|} \quad \text{(II)}$$

Τώρα έχουμε διαδοχικά, αφού η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα και από τις σχέσεις (I) και (II):

$$\xi_1<\xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(x)-f(|\eta\mu x|)}{x-|\eta\mu x|}<\frac{f(x+3)-f(|\eta\mu x|+3)}{x-|\eta\mu x|}$$

Επειδή $|\eta\mu x|<x \Leftrightarrow x-|\eta\mu x|>0$ έχουμε:

$$f(x)-f(|\eta\mu x|)<f(x+3)-f(|\eta\mu x|+3) \Leftrightarrow f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)<f(x+3)-f(x)$$

Επομένως η δοθείσα εξίσωση δεν έχει άλλη ρίζα εκτός από την $x=0$.

2η περίπτωση) Αν $|\eta\mu x|+3<x$, τότε προκύπτει η διάταξη $|\eta\mu x|<|\eta\mu x|+3<x<x+3$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right]$ (επομένως και συνεχής στο $\left[|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right]$). Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_3\in\left(|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_3)=\frac{f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)}{(|\eta\mu x|+3)-|\eta\mu x|}=\frac{f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)}{3} \quad \text{(III)}$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[x,\ x+3]$ (επομένως και συνεχής στο $[x,\ x+3]$).

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi_4\in(x,\ x+3)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_4)=\frac{f(x+3)-f(x)}{(x+3)-x}=\frac{f(x+3)-f(x)}{3} \quad \text{(IV)}$$

Τώρα έχουμε διαδοχικά, αφού η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα και από τις σχέσεις (III) και (IV):

$$\xi_3<\xi_4 \Rightarrow f'(\xi_3)<f'(\xi_4) \Rightarrow \frac{f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)}{3}<\frac{f(x+3)-f(x)}{3} \Rightarrow f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)<f(x+3)-f(x)$$

Επομένως η δοθείσα εξίσωση δεν έχει άλλη ρίζα εκτός από την $x=0$.

Σημείωση: Ακόμα και αν $|\eta\mu x|+3=x$, τα παραπάνω θεωρήματα και τα συμπεράσματα εφαρμόζονται χωρίς βλάβη της γενικότητας.

3ος Τρόπος

Θα δείξουμε ότι η $x=0$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης.

Υποθέτουμε λοιπόν, αντίθετα, ότι υπάρχει $x_0 > 0$ που να είναι λύση της εξίσωσης. Ισχύει $|\eta\mu x_0| < x_0$(από τη γνωστή ανισότητα $|\eta\mu x| \leq |x|$ με την ισότητα μόνο για $x = 0$) καθώς επίσης $|\eta\mu x_0| < |\eta\mu x_0| + 3$ και $x_0 < x_0 + 3$.

Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

1η περίπτωση) Αν $|\eta\mu x_0| + 3 < x_0$, τότε $|\eta\mu x_0| < |\eta\mu x_0| + 3 < x_0 < x_0 + 3$ και επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ σε κάθε ένα από τα διαστήματα
$[|\eta\mu x_0|, |\eta\mu x_0| + 3]$, $[x_0, x_0 + 3]$ άρα υπάρχουν
$\xi_1 \in (|\eta\mu x_0|, |\eta\mu x_0| + 3)$, $\xi_2 \in (x_0, x_0 + 3)$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε η δοθείσα εξίσωση να γράφεται:

$3f'(\xi_1) = 3f'(\xi_2)$ απ΄όπου $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ και αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα (ως κυρτή) άρα είναι και $1-1$ κι έτσι παίρνουμε $\xi_1 = \xi_2$, πράγμα άτοπο αφού τα ξ_1, ξ_2 ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα.

1η περίπτωση) Αν $x_0 \leq |\eta\mu x_0| + 3$, τότε $|\eta\mu x_0| < x_0 \leq |\eta\mu x_0| + 3 < x_0 + 3$.

Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή:

$$f(x_0) - f(|\eta\mu x_0|) = f(x_0 + 3) - f(|\eta\mu x_0| + 3)$$

Επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ σε κάθε ένα από τα διαστήματα
$[|\eta\mu x_0|, x_0]$, $[|\eta\mu x_0| + 3, x_0 + 3]$ άρα υπάρχουν
$\xi_1 \in (|\eta\mu x_0|, x_0)$, $\xi_2 \in (|\eta\mu x_0| + 3, x_0 + 3)$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε η εξίσωση να γράφεται:
$(x_0 - |\eta\mu x_0|)f'(\xi_1) = (x_0 - |\eta\mu x_0|)f'(\xi_2)$

και επειδή $x_0 - |\eta\mu x_0| \neq 0$ άρα $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ και αφού η f'είναι γνησίως αύξουσα (ως κυρτή) άρα είναι και $1-1$, κι έτσι παίρνουμε $\xi_1 = \xi_2$, πράγμα άτοπο αφού τα ξ_1, ξ_2 ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα.
Επομένως σε κάθε περίπτωση η δοθείσα εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = 0$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\cdot \eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow$$
$$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx-\left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx=\pi$$
$$\Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=\pi \quad (1)$$

Τώρα θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow f(x)=g(x)\cdot \eta\mu x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$.

Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot \eta\mu x\right)=\lim_{x\to 0} g(x)\cdot \lim_{x\to 0}\eta\mu x=1\cdot 0=0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 (αφού είναι παραγωγίσιμη στο 0) θα είναι:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$$

Ακόμα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot \eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0}\left[g(x)\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right]=\lim_{x\to 0} g(x)\cdot \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1\cdot 1=1$$

Επομένως, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$.

Δ2. α) Έστω οτι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in\mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το $x_0=0$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat θα έχουμε ότι $f'(x_0)=0$.

Παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση (αφού τα μέλη της είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων) έχουμε:

$$e^{f(x)}\cdot f'(x)+1=f'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)+e^{x}, x\in\mathbb{R}$$

Για $x=x_0$ η τελευταία σχέση γίνεται:

$$e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0)+1=f'\left(f(x_0)\right)\cdot f'(x_0)+e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0}=1 \Leftrightarrow e^{x_0}=e^{0} \Leftrightarrow x_0=0,$$

Δηλαδή $f'(x_0)=f'(0)=0$, άτοπο αφού $f'(0)=1$.

Επομένως η συνάρτηση f **δεν** παρουσιάζει ακρότατο στο $\mathbb{R}$.

β) Από το ερώτημα Δ2 (α) έχουμε ότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (δηλαδή η συνάρτηση f' δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ και είναι επίσης συνεχής (αφού f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$). Επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού $f'(0) = 1 > 0$ (Δ1 ερώτημα) θα είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ θα είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Έχουμε: $\begin{array}{l} -1 \le \eta\mu x \le 1 \\ -1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1 \end{array}$.

Προσθέτοντας τις ποηγούμενες σχέσεις κατά μέλη και διαιρώντας με $f(x) > 0$ (αφού $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, άρα $f(x) > 0$ «κοντά» στο 0) έχουμε:

$$-2 \le \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \le 2 \Rightarrow \frac{-2}{f(x)} \le \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \le \frac{2}{f(x)}$$

Τώρα έχουμε:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{f(x)} = 0$ και, από το κριτήριο της παρεμβολής, παίρνουμε ότι:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$$

Δ4. Για ευκολία θέτουμε $\mathrm{I} = \int_1^{e^\pi} \dfrac{f(\ln x)}{x} dx$. Θα δείξουμε ότι $0 < \mathrm{I} < \pi^2$

Θέτουμε Αααλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα):

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow du = \frac{1}{e^u} dx \Rightarrow e^u du = dx$$
$$u = \ln x \Rightarrow x = e^u$$
$$x = 1 \Leftrightarrow u = 0$$
$$x = e^\pi \Leftrightarrow u = \pi$$

Οπότε :

$$\mathrm{I} = \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^\pi \frac{f(u)}{e^u} e^u du = \int_0^\pi f(u) du$$

Έχουμε, αφού η συνάρτηση :

$$0 \le x \le \pi \Rightarrow f(0) \le f(x) \le f(\pi) \Rightarrow 0 \le f(x) \le \pi$$

Η ισότητα στην προηγούμενη σχέση δεν ισχύει παντού και άρα:

$$\int_0^{\pi} 0dx < \int_0^{\pi} f(x)dx < \int_0^{\pi} \pi dx \Rightarrow 0 < \int_0^{\pi} f(x)dx < \pi^2 \Leftrightarrow 0 < I < \pi^2$$

2ος Τρόπος

Επειδή η συνάρτηση $\ln x$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσες (από το ερώτημα Δ2(β)) έχουμε διαδοχικά:

$$1 \le x \le e^{\pi} \Rightarrow \ln 1 \le \ln x \le \ln e^{\pi} \Rightarrow 0 \le \ln x \le 2 \Rightarrow f(0) \le f(\ln x) \le f(\pi)$$

Διαιρώντας με $x \in \left[1,\ e^{\pi}\right]$ (δηλαδή $x > 0$) έχουμε:

$$\frac{f(0)}{x} \le \frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{f(\pi)}{x} \Leftrightarrow 0 \le \frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{\pi}{x}$$

Δηλαδή έχουμε τις ανισώσεις:

- $\frac{f(\ln x)}{x} \ge 0$, $x \in \left[1,\ e^{\pi}\right]$ και η συνάρτηση $\frac{f(\ln x)}{x}$ δεν είναι παντού 0 (αφού π.χ για $x = e^{\pi}$ δίνει $\frac{f(\ln e^{\pi})}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} = 1 \ne 0$). Επομένως έχουμε:

$$\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx > 0$$

- $\frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow \frac{f(\ln x)}{x} - \frac{\pi}{x} \le 0$, $x \in \left[1,\ e^{\pi}\right]$ και η συνάρτηση $\frac{f(\ln x)}{x} - \frac{\pi}{x}$ δεν είναι παντού 0 (αφού π.χ για $x = 1$ δίνει $\frac{f(\ln 1)}{1} - \frac{\pi}{1} = f(0) - \pi = -\pi \ne 0$). Επομένως έχουμε:

$$\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx - \int_1^{e^{\pi}} \frac{\pi}{x} dx < 0 \Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \int_1^{e^{\pi}} \frac{\pi}{x} dx \Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi \left[\ln x\right]_1^{e^{\pi}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi \left(\ln e^{\pi} - \ln 1\right) \Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi(\pi - 0) \Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$$

Άρα:

$$0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$$

Επιμέλεια λύσεων : www.mathp.gr

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών