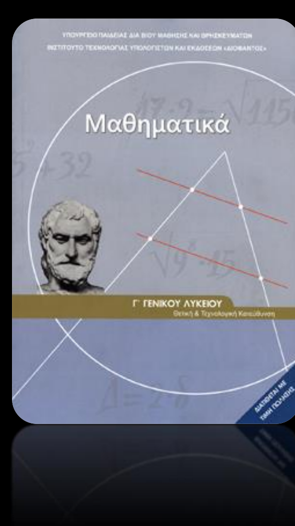
ΛΥΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ

11 – 06 – 18

.... : .....



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

lisari team

ΛΥΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2018

6η έκδοση

Αντωνόπουλος Νίκος

Βελαώρας Γιάννης

Βοσκάκης Σήφης

Γκριμπαβιώτης Πάνος

Ζαμπέλης Γιάννης

Κουστέρης Χρήστος

Μπαδέμης Δημήτρης

Πάτσης Ανδρέας

Παπαμικρούλης Δημήτρης

Ποδηματάς Θωμάς

Τσακαλάκος Τάκης

Σπλήνης Νίκος

Χασάπης Γιώργος

Συντονισμός

Χατζόπουλος Μάκης

Οι απαντήσεις και οι λύσεις

είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς

των μελών της **lisari team**

http://lisari.blogspot.gr/

6η έκδοση: 11 – 06 – 2018 *(συνεχής ανανέωση)*

Οι λύσεις διατίθεται **αποκλειστικά**

από το μαθηματικό **blog**

http://lisari.blogspot.gr

Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο περιλαμβάνονται οι λύσεις των Πανελλαδικών Εξετάσεων 2018 στο μάθημα **Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής.** Η παρουσίαση των λύσεων είναι πλήρης και αναλυτική στο μέγιστο δυνατό, προκειμένου οι μαθητές να μπορούν να μελετήσουν και να επεξεργαστούν εύκολα το αρχείο.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε αποκλειστικά από τη γνωστή **διαδικτυακή ομάδα Μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος, τη **lisari team.** Φέτος εστιάσαμε στη ποικιλία των λύσεων και όσο στο χρόνο που θα αναρτηθούν οι λύσεις.

Την αρχική συγγραφή των λύσεων ακολούθησαν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις με στόχο μια **πληρέστερη και πιο ποιοτική παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες που ενδεχομένως θα έχουν διαφύγει της προσοχής μας, γεγονός αναπόφευκτο δεδομένων των στενών χρονικών περιθωρίων. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου η εν λόγω παρουσίαση θα βελτιωθεί, ίσως εμπλουτιστεί και με εναλλακτικές λύσεις. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις επί των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

lisari team

11 – 06 – 2018

lisari *team*

1. *Αντωνόπουλος Νίκος (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου "Κατεύθυνση" - Άργος)*
2. *Αυγερινός Βασίλης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου "ΔΙΑΤΑΞΗ" - Ν. Σμύρνη και Νίκαια)*
3. *Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο "ΒΕΛΑΩΡΑΣ" - Λιβαδειά Βοιωτίας)*
4. *Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο "Ευθύνη" - Ρέθυμνο)*
5. *Γιαννόπουλος Μιχάλης (Θεσσαλονίκη - Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)*
6. *Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο "Αστρολάβος" - Άρτα)*
7. *Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)*
8. *Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια "Πουκαμισάς" Γλυφάδας)*
9. *Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο "Ώθηση" - Μαρούσι)*
10. *Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο "Παπαπαναγιώτου – Παπαπαύλου" - Σέρρες)*
11. *Κανάβης Χρήστος (Διδακτορικό στο ΕΜΠ – 2ο ΣΔΕ φυλακών Κορυδαλλού)*
12. *Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)*
13. *Κουλούρης Ανδρέας (3ο Λύκειο Γαλατσίου)*
14. *Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο "Στόχος" - Περιστέρι)*
15. *Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο "Ρηγάκης" - Κοζάνη)*
16. *Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)*
17. *Δημήτρης Μπαδέμης (Φροντιστήριο "Πουκαμισάς" - Γλυφάδας)*
18. *Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)*
19. *Νικολόπουλος Θανάσης (Λύκειο Καταστερίου, Ζάκυνθος)*
20. *Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο "Φάσμα" - Αγρίνιο)*
21. *Παπαδομανωλάκη Μαρία (Συνιδιοκτήτρια Πρότυπου Κέντρου Μάθησης "ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ" - Ρέθυμνο)*
22. *Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός "Ρόμβος")*
23. *Πάτσης Ανδρέας (Βόνιτσα - Μαθηματικός)*
24. *Ποδηματάς Θωμάς (Σπουδαστήριο Μαθηματικών Θωμάς και Ρόζα Ποδηματά - Βόλος)*
25. *Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)*
26. *Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο "Μπαχαράκης" - Θεσσαλονίκη)*
27. *Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1ο Λύκειο Χαλκίδας)*
28. *Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο "ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ" - Ηράκλειο Κρήτης)*
29. *Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)*
30. *Σταυρόπουλος Σταύρος (Γραμματέας Ε.Μ.Ε Κορινθίας - Γυμνάσιο Λ.Τ. Λεχαίου Κορινθίας)*
31. *Τρύφων Παύλος (1ο Εσπερινό ΕΠΑΛ Περιστερίου)*
32. *Τσακαλάκος Τάκης (συνταξιούχος αλλά ενεργός μαθηματικός)*
33. *Χαραλάμπους Σταύρος (Θεσσαλονίκη - Μουσικό Λύκειο)*
34. *Χασάπης Γεώργιος (Ιδιωτικός υπάλληλος)*
35. *Χατζόπουλος Μάκης (1ο ΓΕΛ Πετρούπολης)*

lisari team / Σχολικό έτος 2017 – 18

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΔΕΚΑ (10)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 99

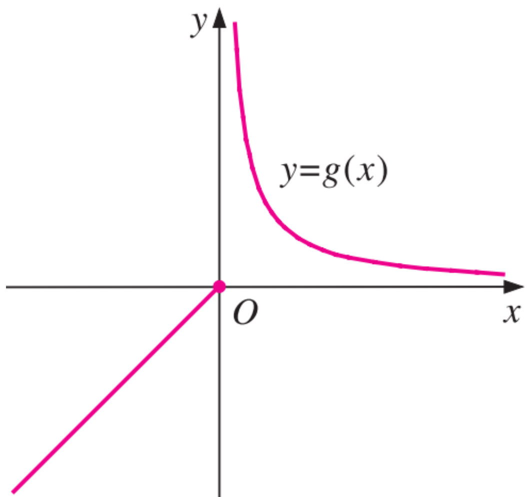
Α2. Α. Ψ

Β. (σχολικό βιβλίο σελ. 35)

Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases} x, & x\le 0\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$$

είναι «1-1» αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη όπως φαίνεται και στο σχήμα.



(σχήμα από το σχολικό βιβλίο)

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ 216

Α4. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε)Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $A_1=(-\infty,0), A_2=(0,+\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x)=1+\frac{8}{x^3}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^3+8}{x^3}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{x^3+8}{x^3}=0\Leftrightarrow x^3+8=0\Leftrightarrow x^3=-8\Leftrightarrow x=-2$$

Για να βρούμε το πρόσημο της f' θα βρούμε το πρόσημο του πηλίκου $\frac{x^3+8}{x^3}$ με βάση το παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x^3+8	-	0 +		+
x^3	-	-	0	+
$x^3\cdot(x^3+8)$	+	-		+

Άρα το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 -	‖	+
$f(x)$	↗	↘	‖	↗

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $(0,+\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,0)$.

Στην θέση $x_0=-2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-2)=-3$

Β2. Η $f'(x)=1+\frac{8}{x^3}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $A_1=(-\infty,0), A_2=(0,+\infty)$ με παράγωγο :

$$f''(x)=-\frac{24}{x^4}<0 \text{ για κάθε } x\neq 0$$

άρα η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$

Β3. Κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x=0$.
Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-4}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\left[\left(x^3-4\right)\cdot\frac{1}{x^2}\right] = -\infty$$

διότι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+}\left(x^3-4\right) = -4$$

και

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3-4}{x^2} = \lim_{x\to 0^-}\left[\left(x^3-4\right)\cdot\frac{1}{x^2}\right] = (-4)\cdot(+\infty) = -\infty$$

διότι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^-}\left(x^3-4\right) = -4$$

Άρα η ευθεία $x=0$ (ο άξονας $y'y$) κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

Πλάγιες –Οριζόντιες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Για να είναι η $y=\lambda x+\beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) αρκεί τα όρια

$\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]$ να είναι πραγματικοί αριθμοί

(αντιστοίχως $\lambda = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]$)

Είναι,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4}{x^3} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-4}{x^2}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4-x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^2} = 0$$

Άρα η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

Επίσης,

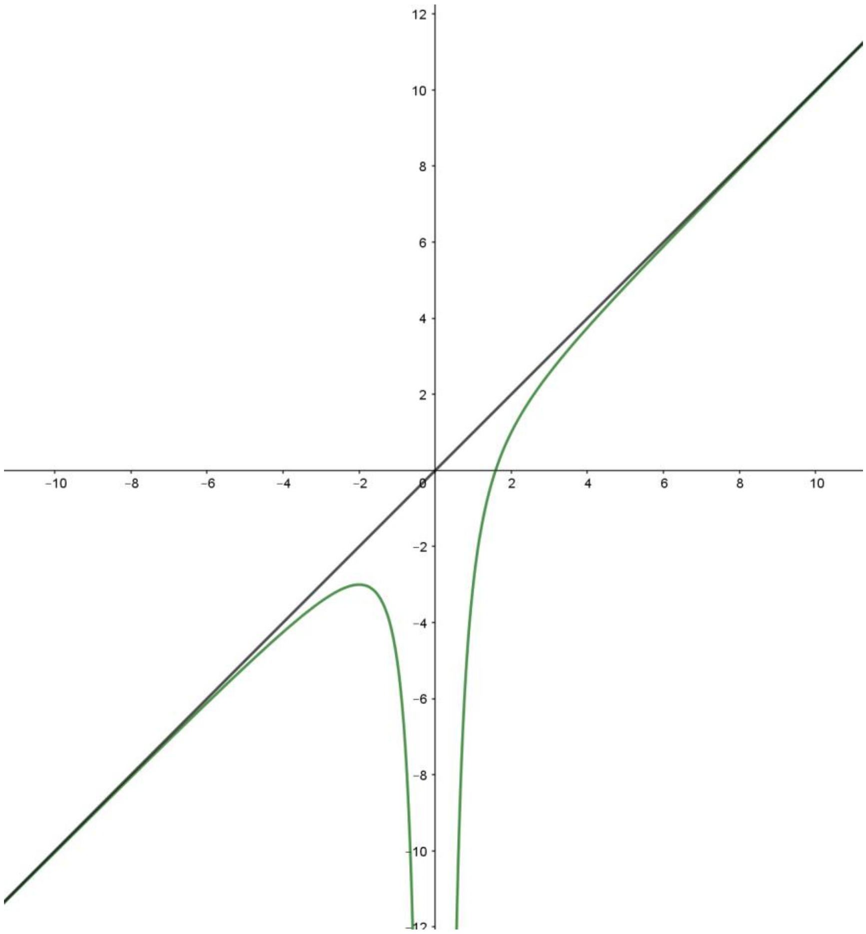
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x^3} \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-x = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-4}{x^2}-x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4-x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{x^2} = 0$$

Άρα η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.

Β4. Με βάση τα παραπάνω ερωτήματα η γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω :



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η περίμετρος του τετραγώνου είναι x m, οπότε η πλευρά του θα είναι $\frac{x}{4}$. Επειδή το x παριστάνει μήκος πρέπει να είναι $x>0$ αλλά και $x<8$ που είναι το συνολικά μήκος του σύρματος, άρα $0<x<8$. Επομένως το εμβαδό του τετραγώνου είναι $\frac{x^2}{16}$. Με το υπόλοιπο του σύρματος το οποίο είναι $8-x$ κατασκευάζουμε τον κύκλο που έχει μήκος:

$$L=2\pi\rho \Leftrightarrow 8-x=2\pi\rho \Leftrightarrow \rho=\frac{8-x}{2\pi}\,\mathrm{m}$$

Οπότε ο κύκλος έχει εμβαδόν:

$$E=\pi\rho^2=\pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\pi\frac{(8-x)^2}{4\pi^2}=\frac{(8-x)^2}{4\pi}$$

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$$E(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}=\frac{\pi x^2+4(8-x)^2}{16\pi}=\frac{\pi x^2+4\left(64-16x+x^2\right)}{16\pi}$$
$$=\frac{\pi x^2+256-64x+4x^2}{16\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\ x\in(0,8)$$

Γ2. Το $E(x)$ ως τριώνυμο του x με $\alpha=\frac{\pi+4}{16\pi}>0$ παρουσιάζει ελάχιστο στο

$$x_0=-\frac{-64}{2(\pi+4)}=\frac{32}{\pi+4}$$

και είναι $E\searrow(0,x_0]$ και $E\nearrow[x_0,8)$, τότε η διάμετρος του κύκλου είναι

$$\delta=2\rho=\frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\pi}=\frac{8}{\pi+4}$$

και η πλευρά του τετραγώνου είναι

$$\alpha=\frac{\frac{32}{\pi+4}}{4}=\frac{8}{\pi+4}=\delta.$$

Β΄ τρόπος

Η E είναι παραγωγίσιμη με $E'(x)=\frac{1}{16\pi}\left(2(\pi+4)x-64\right)=\frac{1}{8\pi}\left((\pi+4)x-32\right)$ με $x\in(0,8)$

Είναι

- $E'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{32}{4+\pi}$
- $E'(x)>0\Leftrightarrow x>\frac{32}{4+\pi}$
- $E'(x)<0\Leftrightarrow x<\frac{32}{4+\pi}$

Πίνακας Προσήμων ...

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
E		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα, είναι $E\searrow(0,x_0]$ και $E\nearrow[x_0,8)$ και η E παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=\frac{32}{\pi+4}$ το

$$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=\frac{1}{16}\left[(\pi+4)\frac{32^2}{(\pi+4)^2}-64\frac{32}{\pi+4}+8\cdot 32\right]=\frac{32}{16\pi}\left(\frac{32}{\pi}-\frac{64}{\pi}+8\right)=\frac{16}{\pi+4}$$

Τότε η διάμετρος του κύκλου $\delta = 2\rho = \dfrac{8-\dfrac{32}{\pi+4}}{\pi} = \dfrac{8}{\pi+4}$ και η πλευρά του τετραγώνου είναι

$$\alpha = \dfrac{\dfrac{32}{\pi+4}}{4} = \dfrac{8}{\pi+4} = \delta .$$

Γ3. Η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$ άρα

$$E\left(\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]\right) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 0^+} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$$

αφού $E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right) = \dfrac{16}{\pi+4}$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi} = \dfrac{256}{16\pi} = \dfrac{16}{\pi}$

Η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$ άρα

$$E\left(\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)\right) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 8^-} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4},4\right)$$

αφού

$$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4}$$

και

$$\lim_{x\to 8^-} E(x) = \lim_{x\to 8^-}\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi} = \lim_{x\to 8^-}\frac{(\pi+4)\cdot 8^2-64\cdot 8+256}{16\pi} = 4$$

- $5 \in E\left(\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]\right)$ (διότι $\dfrac{16}{\pi+4} < 5 < \dfrac{16}{\pi} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\pi+4} < \dfrac{5}{16} < \dfrac{1}{\pi} \Leftrightarrow \pi < \dfrac{16}{5} < \pi+4$) και Ε γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$ ώστε $E(x_1) = 5$.

- $5 \notin E\left(\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)\right)$ άρα δεν υπάρχει $x_2 \in \left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$ ώστε $E(x_2) = 5$ τελικά υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$ ώστε $E(x_1) = 5$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

- $f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$
- $f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} = e^0 \Leftrightarrow x = \alpha$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \alpha$

Πίνακας Προσήμων ...

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\frown$		$\smile$	

Έχουμε σημείο καμπής το $(\alpha, f(\alpha))$ δηλαδή το $(\alpha, 2-\alpha^2)$, αφού επιπλέον ορίζεται η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(\alpha, f(\alpha))$.

Δ2. Είναι,

- $f'(x) = 2(e^{x-\alpha} - x),\ x \in \mathbb{R}$
- $f''(x) = 2(e^{x-\alpha} - 1)$

x	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$+$	$\searrow$	$-$	$\nearrow$	$+$	$\nearrow$	$+\infty$
f		$\nearrow$	$f(x_1)$ TM	$\searrow$		$\searrow$	TE $f(x_2)$	$\nearrow$	

Η συνάρτηση f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = \alpha$ το $f'(\alpha) = 2(1-\alpha) < 0$ αφού $f' \searrow$ στο $(-\infty, \alpha]$ και $f' \nearrow$ στο $[\alpha, +\infty)$.

Επίσης,

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[2\left(e^{x-\alpha}-x\right)\right] = +\infty \text{ διότι, } \lim_{x\to-\infty} e^{x-\alpha} = \lim_{u\to-\infty} e^{u} = 0 \text{ και } \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

Αντίστοιχα,

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2e^{x-\alpha}\cdot\left[1-\frac{x}{e^{x-\alpha}}\right]\right) = +\infty \text{ διότι } \lim_{x\to+\infty} e^{x-\alpha} = \lim_{u\to+\infty} e^{u} = +\infty$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x-\alpha}} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x-\alpha}} = 0$

συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{x}{e^{x-\alpha}}\right) = 1 > 0$

- $A_1 = (-\infty, \alpha] : f'$ συνεχής και $\searrow$ άρα

$$f'(A_1) = \left[f'(\alpha), \lim_{x\to-\infty} f'(x)\right) = \left[2\underbrace{(1-\alpha)}_{-}, +\infty\right)$$

άρα $0 \in f'(A_1) \to$ υπάρχει $x_1 \in (-\infty, \alpha) : f'(x_1) = 0$ και x_1 μοναδικό αφού $f' \searrow$ στο A_1

$$f'(x) = 0 = f'(x_1) \overset{f'\searrow \text{ άρα } 1-1}{\Leftrightarrow} x = x_1$$

$$f'(x) > 0 = f'(x_1) \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} x < x_1$$

$$f'(x) < 0 = f'(x_1) \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} x > x_1$$

- $A_2 = [\alpha, +\infty) : f'$ συνεχής και $\nearrow$ άρα $f'(A_2) = \left[f'(\alpha), \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right) = \left[2\underbrace{(1-\alpha)}_{-}, +\infty\right)$

$0 \in f'(A_2) \Rightarrow$ υπάρχει $x_2 \in (\alpha, +\infty) : f'(x_2) = 0$ και x_2 μοναδικό αφού $f' \nearrow$ στο A_2

$$f'(x) = 0 = f'(x_2) \underset{1-1}{\overset{f'\nearrow A_2}{\Leftrightarrow}} x = x_2$$

$$f'(x) > 0 = f'(x_2) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} x > x_2$$

$$f'(x) < 0 = f'(x_2) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} x < x_2$$

έτσι έχουμε $f \nearrow$ στο $(-\infty, x_1]$, $[x_2, +\infty)$ και $f \searrow$ στο $[x_1, x_2]$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Δ3. Θεωρούμε την $g(x) = f(x) - f(1)$, $x \in [\alpha, x_2]$ έχουμε:

$$g'(x) = f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_2), \text{ άρα η } g \searrow \text{ στο } [\alpha, x_2],$$

Για

$$\alpha < x < x_2 \overset{g\searrow}{\Rightarrow} g(x) < g(\alpha) \Rightarrow f(x) - f(1) < f(\alpha) - f(1) \quad (1)$$

Όμως $1 < \alpha$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, \alpha)$ αφού

$$1<x<\alpha \overset{f' \searrow [1,\alpha]}{\Rightarrow} f'(x)<f'(1)=2(1-\alpha)<0$$

άρα η f ↘ στο $[1,\alpha]$

$$\alpha>1 \overset{f \searrow}{\Rightarrow} f(\alpha)<f(1)$$

Από την (1) έχουμε $f(x)-f(1)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_2)$ άρα η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη.

Β΄ τρόπος
Είναι,

$$f(\alpha)<f(1)\Leftrightarrow 2e^{1-\alpha}-1>2-\alpha^2 \Leftrightarrow 2\left(e^{1-\alpha}-1\right)+\alpha^2-1>0 \text{ που ισχύει}$$

διότι,

$$e^{1-\alpha}>1-\alpha+1 \text{ με } \alpha>1$$

άρα,

$$e^{1-\alpha}-1>1-\alpha \Leftrightarrow 2\left(e^{1-\alpha}-1\right)>2-2\alpha \Leftrightarrow 2\left(e^{1-\alpha}-1\right)+\alpha^2-1>\alpha^2-2\alpha+1=(\alpha-1)^2>0$$

Γ΄ τρόπος
Αρχικά θα δείξουμε ότι $x_1<1$. Έστω $x_1\geq 1$ τότε

$$f'(x_1)\leq f'(1)\Rightarrow 0\leq f'(1)\Rightarrow 0\leq 2e^{1-\alpha}-2\Leftrightarrow 1\leq e^{1-\alpha}\Leftrightarrow 0\leq 1-\alpha\Leftrightarrow \alpha\leq 1 \text{ άτοπο.}$$

Άρα,

$$x_1<1$$

Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=f(1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0\in(\alpha,x_2)$ άρα

$$f(x_0)=f(1)$$

οπότε ικανοποιείται το Θεώρημα Rolle για την f στο κλειστό διάστημα $[1,x_0]$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,x_0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$, άτοπο διότι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)\subseteq(1,x_0)$

Δ΄ τρόπος
Αποδεικνύουμε όπως στο Γ΄ τρόπο ότι $x_1<1$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,x_2]\subseteq[\alpha,x_2]$ άρα και 1 – 1 οπότε:

$$f(x)=f(1)\Leftrightarrow x=1\notin(1,x_2)\subseteq(\alpha,x_2).$$

Ε΄ τρόπος
Είναι

$$f'(1)=2(e^{1-\alpha}-1)<0$$

αφού

$$1<\alpha\Leftrightarrow 1-\alpha<0\Rightarrow e^{1-\alpha}<1$$

και επειδή $f'(x)<0,\ x\in(x_1,x_2)$ ισχύει τελικά $x_1<1<\alpha<x_2$.
Η εξίσωση $f(x)=f(1)$ έχει μοναδική λύση λόγω μονοτονίας της f στο διάστημα (x_1,x_2) την $x=1$ επομένως δεν μπορεί να έχει λύση στο διάστημα (α,x_2).

Δ4. Η f είναι κυρτή στο διάστημα $[2,+\infty)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(2,f(2))$ είναι

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y+2=-2(x-2)\Rightarrow y=-2x+2$$

Άρα για κάθε $x\geq 2$ έχουμε:

$$f(x)\geq -2x+2 \overset{\sqrt{x-2}\geq 0}{\Rightarrow} f(x)\sqrt{x-2}\geq -2\cdot(x-1)\sqrt{x-2}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο στο 2 άρα,

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx>\int_2^3 -2(x-1)\sqrt{x-2}dx \quad (1)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\int_2^3 -2(x-1)\sqrt{x-2}dx=-\frac{32}{15}$

Θέτουμε $u=x-2\Rightarrow du=dx$

Για $x=2$ $u=0$

$x=3$ $u=1$

Άρα

$$-2\int_2^3 (x-1)\sqrt{x-2}dx=-2\int_0^1 (u+1)\sqrt{u}du=-2\int_0^1 u\sqrt{u}du-2\int_0^1 \sqrt{u}du$$

$$=-2\frac{2}{5}\left[u^{\frac{5}{2}}\right]_0^1-2\frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=-\frac{32}{15}$$