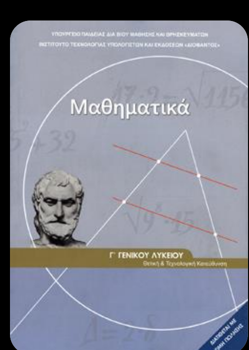

# ΛΥΣΕΙΣ

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**ΔΕΥΤΕΡΑ**

**10 Ιουνίου 2019**

**….: …..**




## ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

## lisari team

## ΛΥΣΕΙΣ

## ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2019

## 4η έκδοση

Βελαώρας Γιάννης
Βοσκάκης Σήφης
Γκριμπαβιώτης Πάνος
Κακαβάς Βασίλης
Μανώλης Ανδρέας
Μπαδέμης Δημήτρης
Πάτσης Ανδρέας
Παπαμικρούλης Δημήτρης
Ποδηματάς Θωμάς
Σκομπρής Νίκος
Σπλήνης Νίκος
Σταυρόπουλος Παύλος
Χασάπης Γιώργος
Χατζόπουλος Μάκης

Οι απαντήσεις - λύσεις είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς των μελών της **lisari team**

**4η έκδοση: 13 – 6 – 2019** *(συνεχής ανανέωση)*

Οι λύσεις διατίθεται **αποκλειστικά**

από το μαθηματικό **blog**

http://lisari.blogspot.gr

# Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο περιλαμβάνονται οι λύσεις των Πανελλαδικών Εξετάσεων 2019 στο μάθημα **Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής.** Η παρουσίαση των λύσεων είναι πλήρης και αναλυτική στο μέγιστο δυνατό, προκειμένου οι μαθητές να μπορούν να μελετήσουν και να επεξεργαστούν εύκολα το αρχείο.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε αποκλειστικά από τη γνωστή **διαδικτυακή ομάδα Μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος, τη **lisari team.** Φέτος εστιάσαμε στη ποικιλία των λύσεων και όσο στο χρόνο που θα αναρτηθούν οι λύσεις.

Την αρχική συγγραφή των λύσεων ακολούθησαν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις με στόχο μια **πληρέστερη και πιο ποιοτική παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες που ενδεχομένως θα έχουν διαφύγει της προσοχής μας, γεγονός αναπόφευκτο δεδομένων των στενών χρονικών περιθωρίων. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου η εν λόγω παρουσίαση θα βελτιωθεί, ίσως εμπλουτιστεί και με εναλλακτικές λύσεις. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις επί των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

**lisari team**

**10 Ιουνίου 2019**

# lisari team

1. *Αντωνόπουλος Νίκος (1ο ΓΕΛ Άργους)*
2. *Αυγερινός Βασίλης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου "ΔΙΑΤΑΞΗ" - Ν. Σμύρνη)*
3. *Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο "ΒΕΛΑΩΡΑΣ" - Λιβαδειά Βοιωτίας)*
4. *Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο "Ευθύνη" - Ρέθυμνο)*
5. *Γιαννόπουλος Μιχάλης ( Θεσσαλονίκη - Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)*
6. *Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο "Λύση" - Άρτα)*
7. *Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)*
8. *Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια "Πουκαμισάς" Γλυφάδας)*
9. *Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο "Ώθηση" - Μαρούσι)*
10. *Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο "Παπαπαναγιώτου –* Κάκανος*" - Σέρρες)*
11. *Κανάβης Χρήστος (Διδακτορικό στο ΕΜΠ – 2ο ΣΔΕ φυλακών Κορυδαλλού)*
12. *Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)*
13. *Κουλούρης Ανδρέας (3ο Λύκειο Γαλατσίου)*
14. *Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο "Στόχος" - Περιστέρι)*
15. *Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο "Ρηγάκης" - Κοζάνη)*
16. *Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)*
17. *Δημήτρης Μπαδέμης (Φροντιστήριο "Πουκαμισάς" - Γλυφάδας)*
18. *Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)*
19. *Νικολόπουλος Θανάσης (Λύκειο Καταστάριου, Ζάκυνθος)*
20. *Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο "Εις τη ν" - Αγρίνιο)*
21. *Παπαδομανωλάκη Μαρία (Συνιδιοκτήτρια Πρότυπου Κέντρου Μάθησης "ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ" - Ρέθυμνο)*
22. *Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός "Ρόμβος")*
23. *Πάτσης Ανδρέας (Βόνιτσα - Μαθηματικός)*
24. *Ποδηματάς Θωμάς ( Σπουδαστήριο Μαθηματικών Θωμάς και Ρόζα Ποδηματά - Βόλος)*
25. *Γιώργος Πολύζος (τ. πάρεδρος στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, συγγραφέας)*
26. *Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)*
27. *Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο "Μπαχαράκης" - Θεσσαλονίκη)*
28. *Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1ο Λύκειο Χαλκίδας)*
29. *Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο "ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ" - Ηράκλειο Κρήτης)*
30. *Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)*
31. *Σταυρόπουλος Σταύρος (Γραμματέας Ε.Μ.Ε Κορινθίας - Γυμνάσιο Λ.Τ. Λεχαίου Κορινθίας)*
32. *Τρύφων Παύλος (1ο Εσπερινό ΕΠΑΛ Περιστερίου)*
33. *Τσακαλάκος Τάκης (συνταξιούχος αλλά ενεργός μαθηματικός)*
34. *Χαραλάμπους Σταύρος (Θεσσαλονίκη - Μουσικό Λύκειο)*
35. *Χασάπης Γεώργιος (Ιδιωτικός υπάλληλος)*
36. *Χατζόπουλος Μάκης (1ο ΓΕΛ Αμαρουσίου)*

lisari team / Σχολικό έτος 2018 – 19

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019**
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΝΝΙΑ (9)**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1)** α) Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το *Α* μια διαδικασία (κανόνα) $f$, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό *y*.

β) i. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη αν είναι ένα προς ένα.

ii. **Α΄ διατύπωση ορισμού**

Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g : f(A) \to \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

**Β΄ διατύπωση ορισμού**

Αν η f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε ορίζεται μια συνάρτηση $g : f(A) \to \mathbb{R}$ η οποία αντιστοιχίζει το y στο x. Η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της $f$ και συμβολίζεται με $f^{-1}$.

Επομένως έχουμε: $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

**Γ΄ διατύπωση ορισμού**

Η αντίστροφη $f^{-1}$ της f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f, δηλαδή το f(A) και ισχύει $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ για κάθε $x \in A$ και $y \in f(A)$.

*(Αν η παραπάνω ισοδυναμία διατυπωθεί λεκτικά θεωρείται σωστή. Οδηγία από την ΚΕΕ)*

**Α2)** Έστω μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σ' ένα διάστημα *Δ* και $x_0$ ένα εσωτερικό σημείο του *Δ*.

Αν η $f$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0$ και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$.

**Α3)** Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε $f'(\xi)(x_2-x_1)=f(x_2)-f(x_1)$ .Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

**Α4) α)** Λάθος, διότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 1, & x<0 \\ -1, & x>0 \end{cases}$ αν και $f'(x)=0$ για κάθε

$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ εντούτοις δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

**β)** Λάθος, διότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1 \\ 2019, & x=1 \end{cases}$ έχει $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$

ενώ η τιμή της στο $x_0=1$ είναι 2019, άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)=2019$

**Α5)** Σωστό το (γ).

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=2\cdot 0+\lambda=\lambda$, άρα $\lambda=2$.

**Β2.** Θεωρούμε συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με: $h(x)=f(x)-x=e^{-x}-x+2$

Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με:

$$h'(x)=-e^{-x}-1<0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και $1-1$. Η h είναι συνεχής στο $[2,3]\subseteq\mathbb{R}$ και

$$h(2)=e^{-2}>0,\quad h(3)=e^{-3}-1=\frac{1-e^{-3}}{e^3}<0$$

επομένως $h(2)\cdot h(3)<0$ και από Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)-x=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(2,3)$ κι αφού η h είναι $1-1$ είναι μοναδική.

**Β3.** Είναι $f'(x)=-e^{-x}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1 – 1, συνεπώς αντιστρέφεται. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $D_f=\mathbb{R}$ άρα έχει σύνολο τιμών: $f(D_f)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=(2,+\infty)$ διότι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}+2\right)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+2\right)=2$$

Για $x\in\mathbb{R}$ και $y\in(2,+\infty)$ είναι:

$$f(x)=y\Leftrightarrow e^{-x}+2=y\Leftrightarrow e^{-x}=y-2\Leftrightarrow -x=\ln(y-2)\Leftrightarrow x=-\ln(y-2)$$

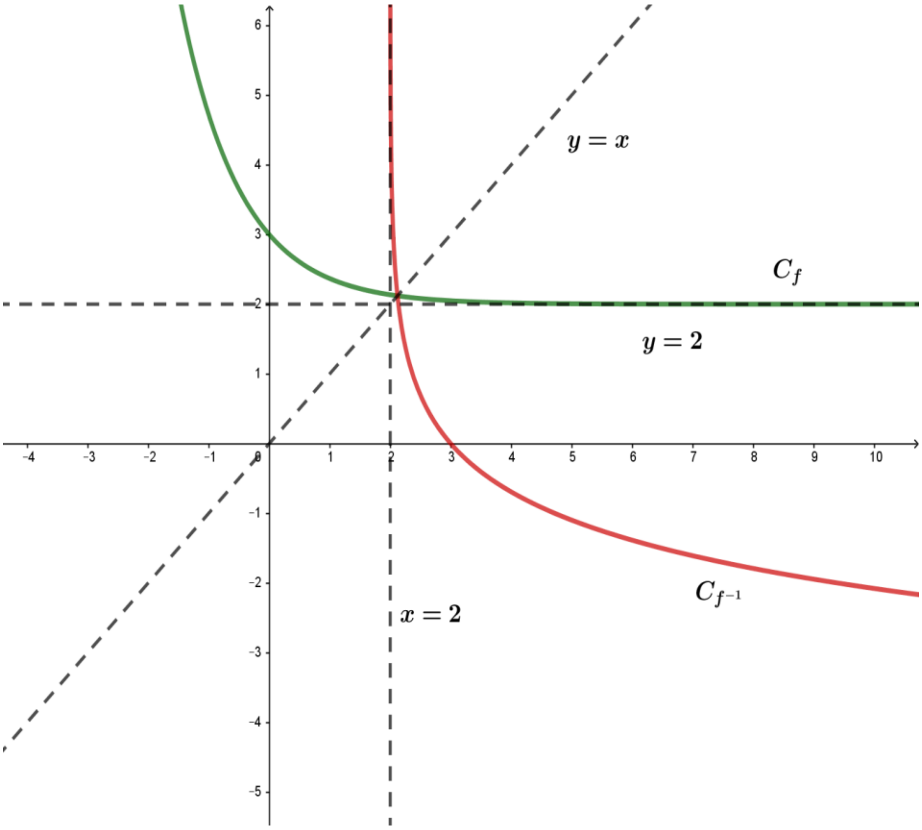
Άρα $f^{-1}(x)=-\ln(x-2), x\in(2,+\infty)$

**Β4.** Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left[-\ln(x-2)\right] = \lim\limits_{u\to 0^+}(-\ln u) = +\infty$ διότι, θέτουμε $u = x-2$ και είναι

$$\lim_{x\to 2^+} u = \lim_{x\to 2^+}(x-2) = 0$$

άρα η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $e^{-x}$ είναι συμμετρική της $e^{x}$ ως προς τον άξονα $y'y$. Οπότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδες πάνω της $e^{-x}$. Η γραφική παράσταση της $f^{-1}$ είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $y = x$. Οι γραφικές παραστάσεις των f και $f^{-1}$ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.




## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Είναι f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα θα είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $x_0 = 1$ οπότε

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \ (1) \ \text{και} \ \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \in \mathbb{R} \ (2)$$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(e^{x-1} + \beta x\right) = e^0 + \beta = 1+\beta$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2 + \alpha\right) = 1 + a$
- $f(1) = 1 + \alpha$

λόγω της (1) είναι $1+\alpha = 1+\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

Επίσης,

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\alpha}{x-1}\overset{\alpha=\beta}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\beta}{x-1}\underset{DLH}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\beta}{1}$$
$$=e^0+\beta=1+\beta$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1}\overset{\alpha=\beta}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}\underset{DLH}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to1^-}\frac{2x}{1}=2$$

Λόγω της (2) είναι $1+\beta=2\Leftrightarrow\beta=1$ οπότε λόγω της (1) $\alpha=1$

**Γ2.** Έχουμε, $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & , \quad x\ge1\\ e^{x-1}+x & , \quad x<1\end{cases}$. Η $f$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\begin{cases}2x & , \quad x\ge1\\ e^{x-1}+1 & , \quad x<1\end{cases}$$

- Για κάθε $x<1$ είναι $f'(x)=e^{x-1}+1>1>0$
- Για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)=2x>2>0$
- Η $f$ είναι και συνεχής στο $x_0=1$

άρα από γνωστή πρόταση του σχολικού βιβλίου η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Έτσι

$$f(A)=f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$

**Γ3. i.** Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=(-\infty,0)$, οπότε

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to0^-}f(x)\right)=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$$

διότι

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=-\infty \text{ και } \lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)=e^{-1}$$

Το $0\in f(A_1)$ συνεπώς η εξίσωση $f(x)=0$ έχει αρνητική ρίζα $x_0$ η οποία είναι μοναδική διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

**ii.** Για $x\in(x_0,+\infty)$ είναι

$$f^2(x)-x_0f(x)=0\Leftrightarrow f(x)\left(f(x)-x_0\right)=0$$

Έχουμε

$$x>x_0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)>0$$

και

$$f(x)-x_0>0 \text{ για κάθε } x>x_0$$

διότι

$$f(x)>0 \text{ και } x_0<0 \Leftrightarrow -x_0>0$$

Οπότε η εξίσωση $f(x)(f(x)-x_0)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$.

**Γ4.** Για $x\geq 1$ έχουμε

$$E=\frac{1}{2}(OK)(KM)=\frac{1}{2}|x||f(x)|=\frac{1}{2}x(x^2+1)=\frac{1}{2}(x^3+x)$$

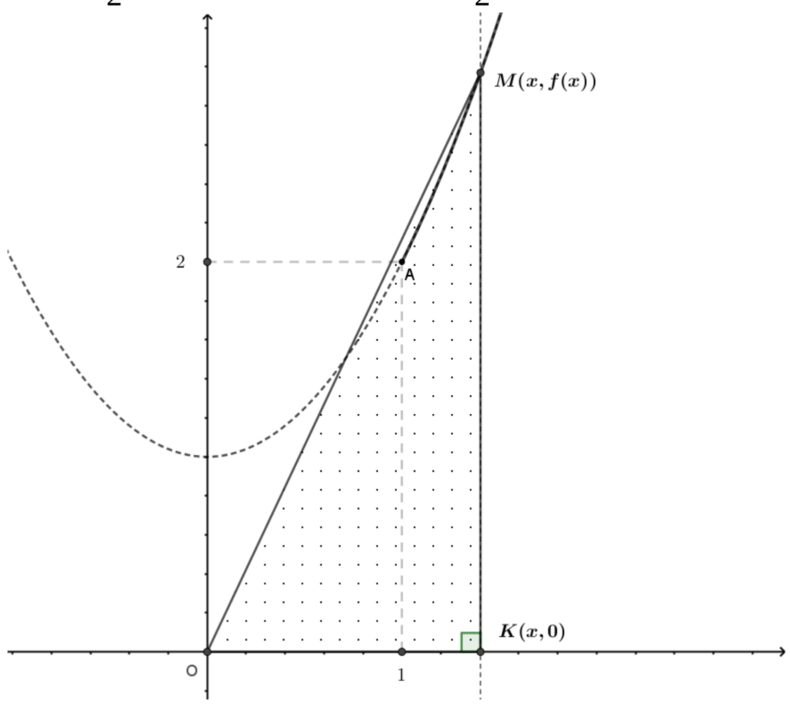
Το εμβαδόν συναρτήσει του χρόνου είναι

$$E(t)=\frac{1}{2}(x^3(t)+x(t))$$

Παραγωγίζουμε ως προς $t$ και έχουμε

$$E'(t)=\frac{1}{2}(3x^2(t)x'(t)+x'(t))$$

Για $t=t_0$ είναι: $E'(t_0)=\frac{1}{2}(3x^2(t_0)x'(t_0)+x'(t_0))=\frac{1}{2}(3\cdot 3^2\cdot 2+2)=28$ τ.μ./sec




## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Πρέπει $f(1)=1$ και $f'(1)=-1$ οπότε $f(1)=1\Leftrightarrow \alpha+\beta=1$ (1). Επίσης,

$$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2x-2}{x^2-2x+2}(x-1)+\alpha$$

$$=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+\alpha$$

όμως $f'(1)=-1\Leftrightarrow \ln 1+\frac{2(1-1)^2}{1-2+2}+\alpha=-1\Leftrightarrow \alpha=-1$ (2)

Από (1), (2) έχουμε $\alpha=-1$ και $\beta=2$

**Δ2.** $E=\int_1^2\left|f(x)-(-x+2)\right|dx=\int_1^2\left|f(x)+x-2\right|dx$

Για κάθε $x\in[1,2]$ έχουμε: $f(x)+x-2=(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2+x-2$

$$=(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)\geq 0$$

Οπότε $E=\int_1^2(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx$

| x | 1 | 2 |
|---|---|---|
| u | 1 | 2 |

Θέτουμε $x^2-2x+2=u$ οπότε $2(x-1)dx=du$ άρα

$$E=\int_1^2\frac{1}{2}\ln u du=\frac{1}{2}\int_1^2\ln u du=\frac{1}{2}\int_1^2 u'\ln u du=\frac{1}{2}\left[u\ln u\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 u\frac{1}{u}du$$

$$=\frac{1}{2}(2\ln 2-1\ln 1)-\frac{1}{2}\left[u\right]_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}\text{ τ.μ.}$$

**Β΄ τρόπος (συνοπτικά - υπολογισμός ολοκληρώματος)**

$$E=\int_1^2(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2(2x-2)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\left(x^2-2x+2\right)'\ln\left(x^2-2x+2\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(x^2-2x+2\right)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2\left(x^2-2x+2\right)\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln 2-\frac{1}{2}\left[x^2-2x\right]_1^2$$

$$=\ln 2-\frac{1}{2}$$

**Δ3. i.** Έχουμε, $f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1$ άρα θα αποδείξουμε ισοδύναμα ότι:

$$f'(x)\geq -1\Leftrightarrow \ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1\geq -1\Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2+1\right]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq 0$$

που ισχύει διότι :

$$(x-1)^2+1\geq 1\overset{\ln x\nearrow(0,+\infty)}{\Rightarrow}\ln\left((x-1)^2+1\right)\geq\ln 1\Rightarrow\ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0\text{ και }\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq 0$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$.

**Β΄ τρόπος (συνοπτικά)**

Θα αποδείξουμε ότι η $f'$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$.

$$f''(x)=\left(\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1\right)'$$
$$=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{4(x-1)\left(x^2-2x+2\right)-2(x-1)^2(2x-2)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$$
$$=\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}+\frac{4(x-1)\left(x^2-2x+2-x^2+2x-1\right)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$$
$$=\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}\left(1+\frac{2}{x^2-2x+2}\right)$$
$$=\frac{2(x-1)\left(x^2-2x+4\right)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$$

Ο πίνακας μεταβολών της $f'$ και ο πίνακας προσήμων την $f''$ είναι ο εξής:

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | | $+$ |
| $f'$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

άρα … για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)\ge f'(1)=-1$.

**ii.** Η $f$ συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ από ΘΜΤ υπάρχει

$\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}$. Όμως

$$f'(\xi)\ge-1\Rightarrow\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\ge-1\Rightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\ge f(\lambda)-\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\ge(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda+2-\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\ge(\lambda-1)\left(\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)\right)+\frac{3}{2}$$

**Β΄ τρόπος (συνοπτικά)**

Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(x)+x, x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι γν. αύξουσα διότι $h'(x)=f'(x)-1\ge0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και την ισότητα να μηδενίζεται μόνο στο $x_0=1$ που είναι συνεχής. Άρα έχουμε:

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda \geq (\lambda-1)\left(\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)\right)+\frac{3}{2} \Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \geq (\lambda-1)\left(\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)\right)+2$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda)+\lambda-2+2$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda)+\lambda$$

$$\Leftrightarrow h\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \geq h(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow \lambda+\frac{1}{2} \geq \lambda$$

που ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Δ4.** Η $g$ είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=-3x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$. Έστω $M\left(x_1, f(x_1)\right)$, $N\left(x_2, g(x_2)\right)$ τα σημεία επαφής των $C_f$, $C_g$ αντίστοιχα τότε πρέπει,

$$f'(x_1)=g'(x_2)$$

Όμως από το Δ3i είναι $f'(x_1)\geq -1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_1=1$ και $g'(x_2)=-3{x_2}^2-1\leq -1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_2=0$, άρα είναι $M\left(1, f(1)\right)$ και $N\left(0, g(0)\right)$ μοναδικά σημεία αφού οι ισότητες ισχύουν μόνο για $x_1=1$ και $x_2=0$

Άρα η κοινή τους εφαπτομένη είναι

$$\varepsilon: y-g(0)=g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=-x+2$$

**Β΄ τρόπος**

Έστω $A\left(x_1, f(x_1)\right)$ και $B\left(x_2, g(x_2)\right)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A\left(x_1, f(x_1)\right)$ είναι

$$y=f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)=f'(x_1)x+f(x_1)-f'(x_1)(x_1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $B\left(x_2, g(x_2)\right)$ είναι :

$$y=g'(x_2)(x-x_2)+g(x_2)=g'(x_2)x+g(x_2)-x_2g'(x_2)$$

Η $C_f$ και η $C_g$ δέχονται κοινή εφαπτομένη αν και μόνο αν

$$\left.\begin{cases} f'(x_1)=g'(x_2) \\ f(x_1)-f'(x_1)x_1=g(x_2)-g'(x_2)x_2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} f'(x_1)=-3{x_2}^2-1 \qquad (1) \\ f(x_1)-f'(x_1)x_1=g(x_2)-g'(x_2)x_2 \end{cases}\right\}(\Sigma)$$

Όμως $f'(x_1)\geq -1$ και $-3{x_2}^2-1\leq -1$

Άρα για να ισχύει η (1) πρέπει :

$$f'(x_1)=-1 \quad \text{και} \quad -3{x_2}^2-1=-1 \Leftrightarrow f'(x_1)=-1 \quad \text{και} \quad x_2=0$$

Όμως

$$f'(x)=-1 \Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2+1\right]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}-1=-1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2+1\right]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}=0 \Leftrightarrow x=1$$

διότι $\ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0$ και $\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο 1,

άρα $f'(x_1)=-1 \Leftrightarrow x_1=1$. Επομένως,

$$(\Sigma)\Leftrightarrow \left.\begin{cases} x_1=1 \text{ και } x_2=0 \\ f(x_1)-f'(x_1)x_1=g(x_2)-g'(x_2)x_2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x_1=1 \text{ και } x_2=0$$

Αφού επαληθεύουν και την :

$$f(x_1)-f'(x_1)x_1=g(x_2)-g'(x_2)x_2$$

Για $x_1=1$ έχουμε :

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)=-1(x-1)+1=-x+1+1=-x+2.$$