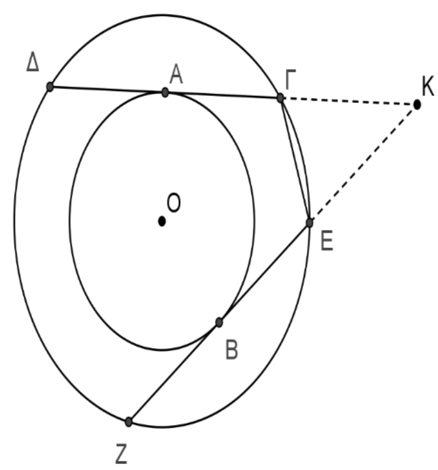
1. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες ρ και R (ρ<R). Οι χορδές ΔΓ και ΖΕ του κύκλου (Ο,R) εφάπτονται του κύκλου (Ο, ρ) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι ΔΓ=ΖΕ.

(Μονάδες 12)

β) Αν οι ΔΓ και ΖΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΕΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

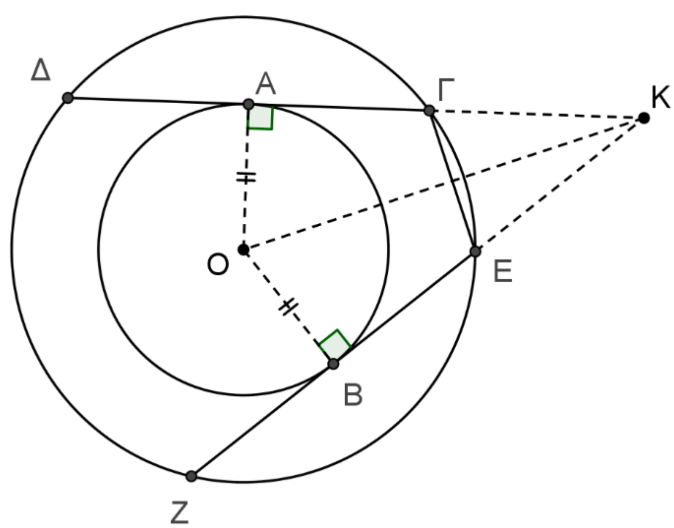
α) Φέρουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ του κύκλου (Ο, ρ) που καταλήγουν στα σημεία επαφής Α και Β με τις εφαπτομένες ΔΓ και ΖΕ αντίστοιχα. Τότε ΟΑ $\perp$ ΓΔ και ΟΒ $\perp$ ΕΖ.

Τα ΟΑ, ΟΒ είναι αποστήματα των χορδών ΔΓ και ΖΕ αντίστοιχα στον κύκλο (Ο,R) και είναι ίσα αφού ΟΑ = ΟΒ = ρ. Άρα και οι χορδές ΔΓ και ΖΕ είναι ίσες.

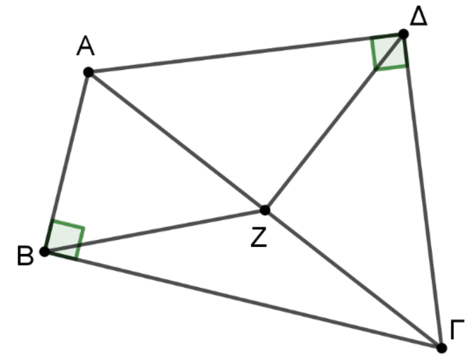
β) Είναι ΚΑ = ΚΒ (1) ως εφαπτόμενα τμήματα από το Κ προς τον κύκλο (Ο, ρ). Επειδή τα ΟΑ και ΟΒ είναι αποστήματα των χορδών ΔΓ και ΖΕ αντίστοιχα, τα σημεία Α και Β είναι μέσα των χορδών και επειδή οι χορδές είναι ίσες και τα μισά τους θα είναι ίσα, δηλαδή ΑΓ = ΒΕ (2).

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2), δηλαδή ΚΑ – ΑΓ= ΚΒ – ΒΕ οπότε ΚΓ= ΚΕ.

Άρα το τρίγωνο ΚΓΕ είναι ισοσκελές.



2. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{B} = 90^o$ και Ζ το μέσο του ΑΓ. Με υποτείνουσα το ΑΓ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ με $\widehat{\Delta} = 90^O$ και ΔΑ = ΔΓ.



α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \Delta Z$

(Μονάδες 13)

β) Αν είναι $A\widehat{\Gamma}B = 30^o$, τότε να υπολογίσετε τις γωνίες $B\widehat{A}\Delta$ και $B\widehat{\Gamma}\Delta$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου, άρα ΒΖ = $\frac{A\Gamma}{2}$ (1).

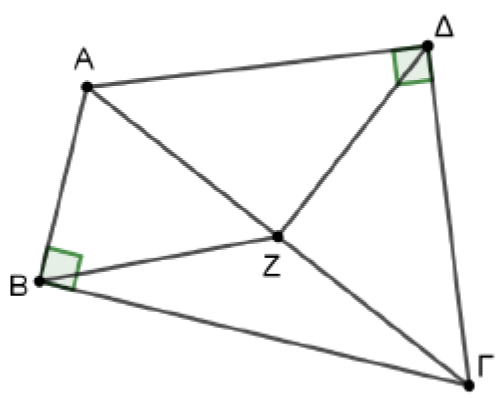
Η ΔΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ, άρα ΔΖ = $\frac{A\Gamma}{2}$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΒΖ = ΔΖ.

β) Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $B\widehat{A}\Gamma + A\widehat{\Gamma}B = 90^o$ και επειδή $A\widehat{\Gamma}B = 30^o$ από την υπόθεση θα έχουμε ότι $B\widehat{A}\Gamma + 30^o = 90^o$, άρα $B\widehat{A}\Gamma = 60^o$.

Επειδή το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οι οξείες γωνίες του είναι ίσες με 45^o, δηλαδή $\Delta\widehat{A}\Gamma = A\widehat{\Gamma}\Delta = 45^o$.

Τότε $B\widehat{A}\Delta = B\widehat{A}\Gamma + \Delta\widehat{A}\Gamma = 60^o + 45^o = 105^o$ και $B\widehat{\Gamma}\Delta = A\widehat{\Gamma}B + A\widehat{\Gamma}\Delta = 30^o + 45^o = 75^o$.



3. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ν και Κ των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΝ = ΚΓ.

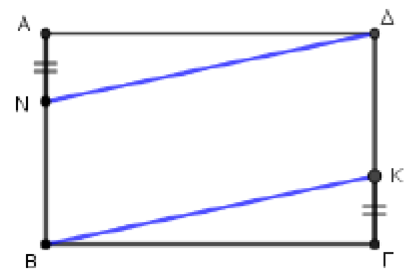
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα , (Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημεία Ν και Κ πάνω στις ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΝ = ΓΚ.



α) Τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ έχουν:

- $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = 90^0$,αφού το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
- ΑΝ = ΚΓ, από υπόθεση
- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ

Άρα, τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

β) Ισχύει ΑΒ = ΔΓ (1) γιατί είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και επίσης είναι ΑΝ = ΚΓ (2) από υπόθεση.

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις ισότητας (1) και (2) βρίσκουμε:

ΑΒ – ΑΝ = ΔΓ – ΚΓ, δηλαδή ΒΝ = ΚΔ (3)

Είναι ΔΝ=ΒΚ (4) ως υποτείνουσες των ίσων τριγώνων ΑΝΔ και ΒΓΚ (ερώτημα αi).

Από (3) και (4) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

4. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ=8 και ΔΓ=12. Αν ΑΗ και ΒΘ είναι τα ύψη του τραπεζίου ΑΒΓΔ,

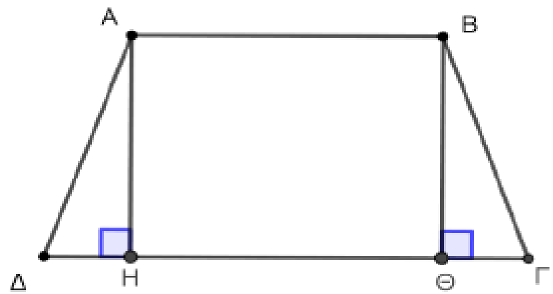
α) να αποδείξετε ότι ΔΗ = ΘΓ. (Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπεζίου. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και ΑΗ, ΒΘ τα ύψη του.

α)

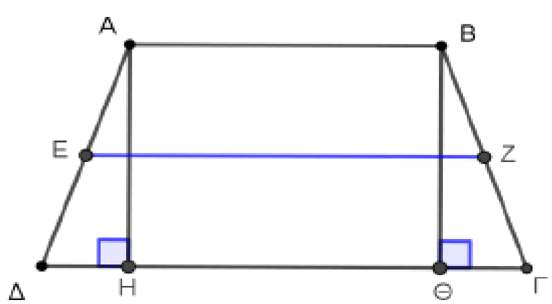


Τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΒΘΓ έχουν:

- $Α\widehat{Η}Δ = Β\widehat{Θ}Γ = 90^0$, επειδή είναι ΑΗ ⊥ ΔΓ και ΒΘ ⊥ ΔΓ ως ύψη του τραπεζίου.
- ΑΔ=ΒΓ, ως πλευρές (μη παράλληλες) του ισοσκελούς τραπεζίου.
- $\widehat{Γ} = \widehat{Δ}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΔΓ του ισοσκελούς τραπεζίου.

Συνεπώς, τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΒΘΓ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια και έχουν την υποτείνουσα και την προσκείμενη σε αυτήν γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, οπότε θα έχουν και τις τρίτες γωνίες του ίσες, δηλαδή $Δ\widehat{Α}Η = Γ\widehat{Β}Θ$, άρα θα έχουν ίσες και τις αντίστοιχες απέναντί τους πλευρές, δηλαδή ΔΗ =ΘΓ.

β)



Έστω ΕΖ η διάμεσος του τραπεζίου, τότε η ΕΖ θα ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων του τραπεζίου, δηλαδή $ΕΖ = \frac{ΑΒ+ΓΔ}{2}$.

Οπότε, $ΕΖ = \frac{8+12}{2} = \frac{20}{2} = 10$.

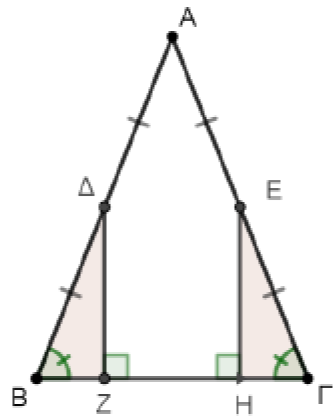
5. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ).

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ. (Μονάδες 13)

β) Αν $\hat{A} = 75° + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ.



α) Έστω Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΔΖ, ΕΗ οι αποστάσεις των Ε, Ζ από τη βάση ΒΓ.

Τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΗΓ έχουν:

- $B\hat{Z}\Delta = \Gamma\hat{H}E = 90^0$ αφού ΔΖ και ΕΗ ως αποστάσεις, από την υπόθεση, είναι κάθετες στη ΒΓ.
- ΔΒ = ΕΓ ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ως προσκείμενες γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

Άρα τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΗΓ είναι ορθογώνια που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα.

Οπότε έχουν και ΔΖ = ΕΗ ως πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

Δηλαδή, τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ.

β) Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$ ή $75^o + \hat{B} + \hat{B} + \hat{B} = 180^o$ ή $3\hat{B} = 105^o$, άρα $\hat{B} = 35^o$.

Οπότε $\hat{A} = 75^o + 35^o = 110^o$.

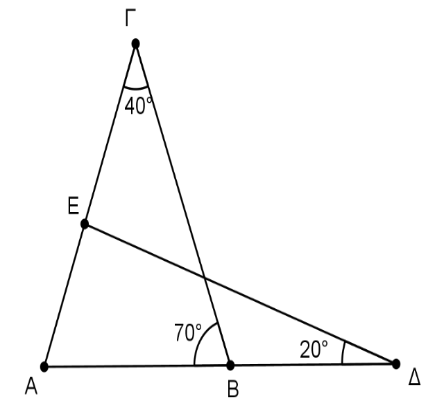
6. Στο Διπλανό σχήμα, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 12)

β) η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή.

(Μονάδες 13)



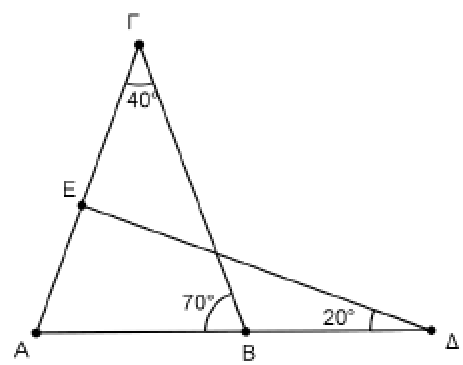
ΛΥΣΗ

α) Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o$ (1) και αφού $\widehat{B} = 70^0$ και $\widehat{\Gamma} = 40^o$ τότε από τη σχέση (1) βρίσκουμε ότι $\widehat{A} = 70^o$.

Επειδή είναι $\widehat{A} = 70^o = \widehat{B}$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΓΑ και ΓΒ.

β) Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΔ έχουμε:

$A\hat{E}\Delta + \widehat{A} + \widehat{\Delta} = 180^o$ (2) και αφού $\widehat{\Delta} = 20^0$ ως δεδομένο και $\widehat{A} = 70^o$ από α) ερώτημα, τότε από τη σχέση (2) βρίσκουμε ότι $A\hat{E}\Delta = 90^o$.



7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε $ΑΓ < ΑΒ$.Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $ΑΔ = ΑΓ$ και στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $ΑΕ = ΑΓ$.

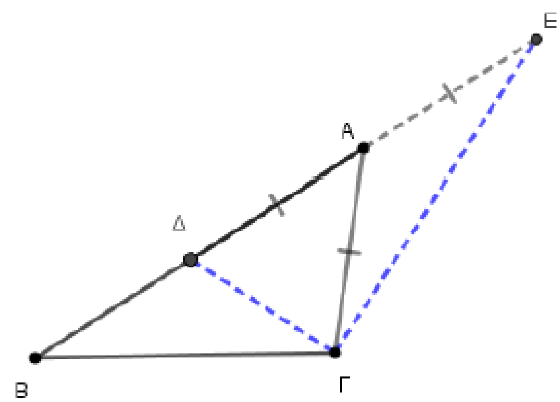
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα ΔΓ και ΕΓ είναι κάθετα μεταξύ τους, (Μονάδες 12)

β) η γωνία $Ε\hat{Α}Γ$ είναι διπλάσια της γωνίας $Α\hat{Δ}Γ$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ<ΑΒ, σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΔ=ΑΓ και σημείο Ε στην προέκταση της ΒΑ τέτοιο ώστε ΑΕ=ΑΓ.



α) Φέρνουμε τα τμήματα ΔΓ και ΓΕ.

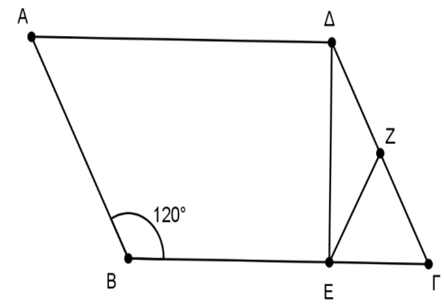
Αφού από υπόθεση είναι ΑΔ = ΑΓ και ΑΕ = ΑΓ, τότε ΑΔ = ΑΓ = ΑΕ = $\frac{ΔΕ}{2}$. Οπότε στο τρίγωνο ΔΓΕ το τμήμα ΑΓ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΔΕ και είναι ίσο με το μισό της πλευράς ΔΕ.

Επομένως, το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά ΔΕ και με ορθή τη γωνία $Ε\hat{Γ}Δ$, άρα τα τμήματα ΔΓ και ΕΓ είναι κάθετα μεταξύ τους.

β) Επειδή είναι ΑΓ = ΑΔ, το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές, άρα $Α\hat{Γ}Δ = Α\hat{Δ}Γ$ (1).

Η $Ε\hat{Α}Γ$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΔΓ, οπότε είναι $Ε\hat{Α}Γ = Α\hat{Γ}Δ + Α\hat{Δ}Γ$ και αφού είναι $Α\hat{Γ}Δ = Α\hat{Δ}Γ$ λόγω της σχέσης (1), άρα $Ε\hat{Α}Γ = Α\hat{Δ}Γ + Α\hat{Δ}Γ = 2Α\hat{Δ}Γ$.

8. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\widehat{B} = 120^0$ και ΔΕ ⊥ ΒΓ. Έστω ΕΖ η διάμεσος του τριγώνου ΔΕΓ.



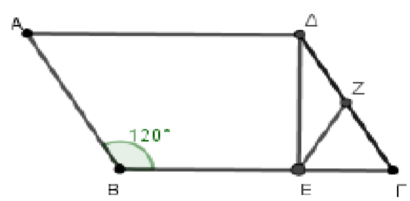
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$ του παραλληλογράμμου. (Μονάδες 8)

β) Αν Κ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, να αποδείξετε ότι ΕΖ = ΑΚ. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $E\widehat{Z}\Gamma$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

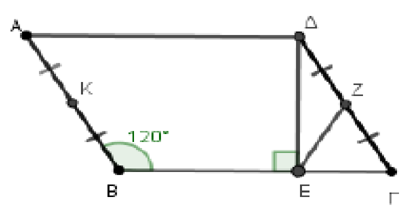
α)



Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ οπότε είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^o$ και αφού $\widehat{B} = 120^0$ άρα $\widehat{A} = 60^o$.

Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου άρα είναι ίσες, οπότε $\widehat{\Gamma} = \widehat{A} = 60^o$.

β)



Έστω Κ το μέσο της πλευράς ΑΒ, τότε θα είναι $AK = KB = \frac{AB}{2}$ (1).

Αφού ΔΕ ⊥ ΒΓ τότε το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο και το ΕΖ είναι διάμεσος (από υπόθεση) που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του ΔΓ, άρα $EZ = \frac{\Delta\Gamma}{2}$ (2).

Είναι ΑΒ=ΔΓ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ οπότε $\frac{AB}{2} = \frac{\Delta\Gamma}{2}$ (3)

Επομένως, από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΑΚ = ΕΖ.

γ) Επειδή $EZ = \frac{\Delta\Gamma}{2} = Z\Delta = Z\Gamma$ αφού Ζ είναι μέσο της ΔΓ, το τρίγωνο ΕΖΓ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΖΕ, ΖΓ και τη γωνία $\widehat{\Gamma} = 60^o$ από το α) ερώτημα, οπότε θα είναι ισόπλευρο.

Άρα $E\widehat{Z}\Gamma = 60^o$.