Διαίρεση Πολυώνυμων

ΑΛΓΕΒΡΑ Β’ΛΥΚΕΙΟΥ

Διαίρεση Πολυώνυμων

ΘΕΩΡΗΜΑ

(Ταυτότητα της διαίρεσης) Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, τέτοια ώστε:

$$\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)+\upsilon(x), \qquad (2)$$

όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

Όπως και στη διαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών το $\Delta(x)$ λέγεται **διαιρετέος**, το $\delta(x)$ **διαιρέτης**, το $\pi(x)$ **πηλίκο** και το $\upsilon(x)$ **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

Διαδικασία Διαίρεσης 1/2

$\boldsymbol{x^3 - 5x^2 + 2x - 1}$ **με το πολυώνυμο** $\boldsymbol{x - 3}$

1. Κάνουμε το σχήμα της διαίρεσης και γράφουμε τα δύο πολυώνυμα.

$$\begin{array}{l|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

2. Βρίσκουμε τον πρώτο όρο x^2 του πηλίκου διαιρώντας τον πρώτο όρο x^3 του διαιρετέου με τον πρώτο όρο x του διαιρέτη.

$$\begin{array}{l|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} & x^2 \end{array}$$

3. Πολλαπλασιάζουμε το x^2 με $x - 3$ και το γινόμενο $x^3 - 3x^2$ το αφαιρούμε από το διαιρετέο. Βρίσκουμε έτσι το πρώτο μερικό υπόλοιπο $-2x^2 + 2x - 1$.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2 \qquad\qquad & x^2 \\ \hline -2x^2+2x-1 & \end{array}$$

4. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 με νέο διαιρετέο το $-2x^2 + 2x - 1$. Βρίσκουμε έτσι το δεύτερο μερικό υπόλοιπο $-4x - 1$.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2 \qquad\qquad & x^2-2x \\ \cline{1-1} -2x^2+2x-1 & \\ 2x^2-6x \quad\; & \\ \cline{1-1} -4x-1 & \end{array}$$

Διαδικασία Διαίρεσης 2/2

5. Τέλος επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 με νέο διαιρετέο το $-4x - 1$. Βρίσκουμε έτσι το τελικό υπόλοιπο -13 και το πηλίκο $x^2 - 2x - 4$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -5x^2 & +2x & -1 & x-3 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +3x^2 & & & x^2-2x-4 \\ \cline{1-4}
 & -2x^2 & +2x & -1 & \\
 & 2x^2 & -6x & & \\ \cline{1-4}
 & & -4x & -1 & \\
 & & 4x & -12 & \\ \cline{1-4}
 & & & -13 &
\end{array}
$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει η ισότητα:

$$x^3 - 5x^2 + 2x - 1 = (x-3) \cdot (x^2-2x-4) + (-13)$$

(διαιρετέος) = (διαιρέτης) • (πηλίκο) + (υπόλοιπο)

- ✓ Η διαίρεση τελειώνει, όταν το υπόλοιπο γίνει μηδέν ή ο βαθμός του υπόλοιπου γίνει μικρότερος από το βαθμό του διαιρέτη.

Δοκιμάστε μόνοι σας

$$\boldsymbol{2x^3 + 2x^2 - x - 1 \ \mu\varepsilon \ 2x^2 - 1}$$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +2x^2 & -x & -1 & 2x^2-1 \\
\cline{5-5}
-2x^3 & & +x & & x+1 \\
\cline{1-4}
 & 2x^2 & & -1 & \\
 & -2x^2 & & +1 & \\
\cline{1-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

- Αν σε μια διαίρεση είναι υ(x) = 0, τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια** και η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται

$$\boldsymbol{\Delta(x) = \delta(x) \times \pi(x)}$$

- Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το δ(x) **διαιρεί** το Δ(x) ή ότι το δ(x) είναι **παράγοντας** του Δ(x) ή ότι το Δ(x) **διαιρείται με το** δ(x) ή ακόμη ότι το δ(x) είναι **διαιρέτης** του Δ(x). Έτσι για παράδειγμα το $2x^2 - 1$ είναι παράγοντας ή διαιρέτης του $2x^3 + 2x^2 - x - 1$.

Διαίρεση πολυωνύμου με x–ρ 1/4

Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $x-\rho$ γράφεται. $$P(x)=(x-\rho)\pi(x)+\upsilon(x)$$

Επειδή ο διαιρέτης $x-\rho$ είναι πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο υ. Έτσι έχουμε:

$$P(x)=(x-\rho)\pi(x)+\upsilon$$

και, αν θέσουμε $x=\rho$, παίρνουμε

$$P(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)+\upsilon=0+\upsilon=\upsilon$$

Επομένως

$$\boxed{P(x)=(x-\rho)\pi(x)+P(\rho)}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x–ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ. Είναι δηλαδή $\upsilon=P(\rho)$

Διαίρεση πολυωνύμου με x–ρ 2/4

ΘΕΩΡΗΜΑ Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν
$$P(\rho)=0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Τότε
$$P(x)=(x-\rho)\pi(x)$$
Από την ισότητα αυτή για $x=\rho$ παίρνουμε
$$P(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)=0,$$
που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

Αντιστρόφως: Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή ισχύει $P(\rho)=0$. Τότε από τη σχέση
$$P(x)=(x-\rho)\pi(x)+P(\rho)$$
παίρνουμε
$$P(x)=(x-\rho)\pi(x),$$
που σημαίνει ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

Διαίρεση πολυωνύμου με x–ρ 3/4

1° Να εξεταστεί αν τα πολυώνυμα x+2 και x – 1 είναι παράγοντες του πολυωνύμου $P(x)=x^3+x^2-x+2$.

ΛΥΣΗ

Το x+2 γράφεται $x-(-2)$. Επειδή $P(-2)=(-2)^3+(-2)^2-(-2)+2=0$, το –2 είναι ρίζα του P(x). Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, το x+2 είναι παράγοντας του P(x).

Επειδή $P(1)=1^3+1^2-1+2=3\neq 0$, το 1 δεν είναι ρίζα του P(x). Επομένως το x – 1 δεν είναι παράγοντας του P(x).

Διαίρεση πολυωνύμου με x–ρ 4/4

Δοκιμάστε μόνοι σας!! Α3 σελ 139

3. Να βρείτε τις τιμές του k, για τις οποίες το x–1 είναι παράγοντας του $g(x) = k^2x^4 + 3kx^2 - 4$.

Λύση

Πρέπει και αρκεί $g(1) = 0 \Leftrightarrow k^2 1^4 + 3k1^2 - 4 = 0$

$$k^2 + 3k - 4 = 0$$

$\Delta = 9 + 16 = 25$ $\qquad k = \dfrac{-3 \pm 5}{2} = 1$ ή -4

Σχήμα HORNER 1/3

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου, π.χ. του P(x) = $3x^3 - 8x^2 + 7x + 2$, με ένα πολυώνυμο της μορφής x – ρ.

Συντελεστές του P(x)

3	−8	7	2	ρ
	3ρ	(3ρ−8)ρ	[(3ρ−8)ρ+7]ρ	
3	3ρ−8	(3ρ−8)ρ+7	[(3ρ−8)ρ+7]ρ+2	

Συντελεστές Πηλίκου

Υπόλοιπο

Σχήμα HORNER 2/3

Σχήμα Horner για να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του
$\boldsymbol{P(x) = 3x^5 + 3x^4 + 6x - 13}$ **με το x – 2.**

3	3	0	0	6	−13	ρ=2
	6	18	36	72	156	
3	9	18	36	78	143	

[Συμπληρώστε με 0 τους συντελεστές των δυνάμεων του x που δεν υπάρχουν.]

Επομένως το πηλίκο της διαίρεσης είναι $\pi(x) = 3x^4 + 9x^3 + 18x^2 + 36x + 78$
και το υπόλοιπο $\upsilon = P(2) = 143$

Σχήμα HORNER 3/3

Δοκιμάστε μόνοι σας!! Άσκηση 4ί)

4.i)

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $(-x^3+75x-250):(x+10)$

Λύση

-1	0	75	-250	-10
	10	-100	250	
-1	10	-25	0	

Άρα $\pi(x)=-x^2+10x-25$ και $\upsilon=0$

Ασκήσεις για το σπίτι

Σελ 139

1 ί)

4

5

6