ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

Τι γνωρίζουμε έως τώρα

- Γνωρίζουμε τον τρόπο επίλυσης εξισώσεων της μορφής

✓ $\alpha x + \beta = 0$

✓ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

✓ $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$

Οι εξισώσεις αυτές είναι ειδικές περιπτώσεις μιας κατηγορίας εξισώσεων της μορφής $P(x) = 0$, όπου $P(x)$ πολυώνυμο, οι οποίες λέγονται πολυωνυμικές εξισώσεις.

Πολυωνυμικές Εξισώσεις 1/10

- Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού ν ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \cdots \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0,\ \alpha_v \neq 0$$

- Π.χ.

➢ $2x^3 - 5x^2 + x - 2 = 0$ 3ου Βαθμού

➢ $-3x^6 + 5x^2 + 1 = 0$ 6ου Βαθμού

- Ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου

$$P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \cdots \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

➢ Δηλαδή κάθε αριθμό ρ, για τον οποίο ισχύει $P(\rho) = 0$

Πολυωνυμικές Εξισώσεις 2/10

- Όπως για τις πολυωνυμικές εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού, έτσι και για τις πολυωνυμικές εξισώσεις 3ου και 4ου βαθμού έχουν βρεθεί γενικοί τρόποι επίλυσής τους. Οι τρόποι αυτοί όμως απαιτούν γνώσεις που είναι έξω από το σκοπό αυτού του βιβλίου και δε θα αναπτυχθούν εδώ. Τέλος, έχει αποδειχθεί ότι γενικός τρόπος επίλυσης για πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου του 4 δεν υπάρχει. Για τους λόγους αυτούς, για την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου από 2, θα περιοριστούμε στη γνωστή μας παραγοντοποίηση.

- Η επίλυση μια εξίσωσης με τη μέθοδο αυτή στηρίζεται στην ισοδυναμία:

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbb{P}_2(\mathbf{x}) \cdot \ldots \ldots \cdot \mathbb{P}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow (\mathbb{P}_1(\mathbf{x}) = 0 \; \dot{\eta} \; \mathbb{P}_2(\mathrm{x}) = 0 \; \dot{\eta} \ldots \dot{\eta} \mathbf{P}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = 0)$$

Πολυωνυμικές Εξισώσεις 3/10

- Παράδειγμα: Επίλυση $x^3 - 3x + 2 = 0$

$$
\begin{aligned}
x^3 - 3x + 2 = 0 \quad & \Leftrightarrow x^3 - x - 2x + 2 = 0 \\
& \Leftrightarrow x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0 \\
& \Leftrightarrow x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) = 0 \\
& \Leftrightarrow (x - 1)[x(x + 1) - 2] = 0 \\
& \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \\
& \Leftrightarrow x - 1 = 0 \ \text{ή} \ x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \ \text{ή} \ x = -2
\end{aligned}
$$

Πολυωνυμικές Εξισώσεις 4/10

ΘΕΩΡΗΜΑ **(ακέραιων ριζών)** Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν ο $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε διαδοχικά έχουμε

$$\alpha_\nu\rho^\nu + \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} + \ldots\ldots + \alpha_1\rho + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = -\alpha_\nu\rho^\nu - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} - \ldots\ldots - \alpha_1\rho$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 = \rho(-\alpha_\nu\rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2} - \ldots\ldots - \alpha_1)$$

Επειδή οι ρ, α_1, α_2,..., α_ν είναι ακέραιοι έπεται ότι και ο $-\alpha_\nu\rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2} - \ldots\ldots - \alpha_1$ είναι ακέραιος. Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του α_0.

Πολυωνυμικές Εξισώσεις 5/10

❖Μεθοδολογία επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων με την βοήθεια του θεωρήματος των ακεραίων ριζών.

✓Βρίσκουμε τους ακέραιους διαιρέτες p του σταθερού όρου του πολυωνύμου P(X).

✓Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ελέγχουμε αν κάποιος από αυτούς μηδενίζει το πολυώνυμο. (p ρίζα του P(x))

✓Αν το μηδενίζει κάποιος τότε το πολυώνυμο γράφετε $P(x) = (x - p)Q(x)$. Όπου Q(x) είναι το πολυώνυμο με συντελεστές τη τελευταία γραμμή του σχήματος Horner (είναι ενός βαθμού μικρότερου από το P(X)).

✓Συνεχίζουμε μέχρι το Q(x) να γίνει βαθμού ίσου με 2 όποτε και κάνουμε διακρίνουσα!

Πολυωνυμικές Εξισώσεις 6/10

1° Να λυθεί η εξίσωση $x^3-3x^2+x+2=0$

ΛΥΣΗ

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες ±1, ±2 του σταθερού όρου. Με το σχήμα Horner εξετάζουμε αν κάποιος από αυτούς μηδενίζει το πολυώνυμο $P(x)=x^3-3x^2+x+2$.

Έχουμε:

1	−3	1	2	ρ =1
	1	−2	−1	
1	−2	−1	1	

$$P(1)=1\neq0$$

Άρα το 1 δεν είναι ρίζα του P(x)

1	−3	1	2	ρ=−1
	−1	4	−5	
1	−4	5	−3	

$$P(-1)=-3\neq0$$

Άρα το −1 δεν είναι ρίζα του P(x)

1	−3	1	2	ρ=2
	2	−2	−2	
1	−1	−1	0	

$$P(2)=0$$

Άρα το 2 είναι ρίζα του P(x)

Επομένως το x−2 είναι παράγοντας του P(x). Συγκεκριμένα από το τελευταίο σχήμα έχουμε

$$P(x)=(x-2)(x^2-x-1)$$

Πολυωνυμικές Εξισώσεις 7/10

οπότε η εξίσωση γράφεται $(x-2)(x^2-x-1)=0$ και έχει ρίζες τους αριθμούς 2, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ και $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Πολυωνυμικές Εξισώσεις 8/10

2° Να λυθεί η εξίσωση $x^4+5x^3+9x^2+8x+4=0$.

ΛΥΣΗ

Οι διαιρέτες του 4 είναι οι: ±1, ±2, ±4. Επειδή όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης είναι θετικοί, οι διαιρέτες 1, 2, και 4 αποκλείεται να είναι ρίζες της. Επομένως οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι -1, -2, και -4.

Πολυωνυμικές Εξισώσεις 9/10

Αν εργαστούμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε $P(-1) = 1 \neq 0$, ενώ για $\rho = -2$ έχουμε:

1	5	9	8	4	$\rho = -2$
	-2	-6	-6	-4	
1	3	3	2	0	

$P(-2) = 0$

Άρα το -2 είναι ρίζα του $P(x)$

Η εξίσωση τότε γράφεται

$$(x+2)(x^3+3x^2+3x+2)=0$$

Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία για το $Q(x) = x^3+3x^2+3x+2$ και $\rho = -2$ έχουμε

1	3	3	2	$\rho = -2$
	-2	-2	-2	
1	1	1	0	

$Q(-2)=0$

Άρα το -2 είναι ρίζα του $Q(x)$

Επομένως είναι $x^3+3x^2+3x+2=(x+2)(x^2+x+1)$ και η αρχική εξίσωση γράφεται

$$(x+2)^2(x^2+x+1)=0$$

Η τελευταία έχει μια μόνο διπλή ρίζα τον αριθμό -2.

Πολυωνυμικές Εξισώσεις 10/10
Δοκιμάστε μόνοι σας!!

- Να λύσετε την εξίσωση: $2x^3 - x^2 - 4x + 3$

  ΛΥΣΗ

- Να λύσετε την εξίσωση: $x^3 - x^2 + \ x - 1$

  ΛΥΣΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

- Ασκήσεις παραγράφου 4.3

✓**Α1 i,ii,iii σελίδα 146**

✓**Α2 σελίδα 147**

❖Η παρουσίαση και οι ασκήσεις θα ανέβουν στην ιστοσελίδα του σχολείου