

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΙ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΕΩΣ ΤΩΡΑ 1/2

- Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής

$$Ax + By + \Gamma = 0 \quad A \neq 0 \quad \text{ή} \quad B \neq 0$$

Και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της παραπάνω μορφής παριστάνει ευθεία γραμμή.

- Ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης η κλίση μιας ευθείας (ϵ) την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η (ϵ) με τον άξονα x . ' Για να παραστήσουμε τον συντελεστή διεύθυνσης, συνήθως χρησιμοποιούμε το γράμμα λ . Δηλαδή $\lambda = \epsilon$.

Όσον αφορά την εξίσωση ευθείας με μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ και $B \neq 0$ διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

- ❖ Αν $B \neq 0$, τότε η ευθεία (ϵ) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B}$
- ❖ Αν $B = 0$ τότε η ευθεία (ϵ) είναι κάθετη στον άξονα x

[geogebra](#)

ΤΙ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΕΩΣ ΤΩΡΑ 2/2

- Η ευθεία (ε) με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι:
- ❖ Παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (B, -A)$
- ❖ Κάθετη στο διάνυσμα $\vec{v} = (A, B)$

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ 1/4

■ Ας είναι:

$$\begin{cases} A_1 \cdot x_1 + B_1 \cdot y_1 + \Gamma_1 = 0 \text{ με } A_1 \neq 0 \text{ ή } B_1 \neq 0 \\ A_2 \cdot x_1 + B_2 \cdot y_1 + \Gamma_2 = 0 \text{ με } A_2 \neq 0 \text{ ή } B_2 \neq 0 \end{cases}$$

οι εξισώσεις δύο ευθειών ε_1 και ε_2 στο επίπεδο αντίστοιχα.

Τις εξισώσεις αυτές μπορούμε να τις γράψουμε ισοδύναμα ως εξής:

$$\begin{cases} A_1 \cdot x_1 + B_1 \cdot y_1 = -\Gamma_1 \text{ με } A_1 \neq 0 \text{ ή } B_1 \neq 0 \\ A_2 \cdot x_1 + B_2 \cdot y_1 = -\Gamma_2 \text{ με } A_2 \neq 0 \text{ ή } B_2 \neq 0 \end{cases}$$

Τα διανύσματα $\vec{\eta}_1 = (A_1, B_1)$ και $\vec{\eta}_2 = (A_2, B_2)$ είναι κάθετα στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.

Επομένως, θα προσδιορίζουν και τη σχετική θέση των ευθειών αυτών.

Η ορίζουσα $\det(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2) = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$, σχηματίζεται από τους συντελεστές των αγνώστων του

συστήματος (1), επομένως είναι η ορίζουσα του συστήματος και συμβολίζεται:

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1 \cdot B_2 - B_1 \cdot A_2$$

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ 2/4

■ Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

❖ Αν τα διανύσματα $\vec{\eta}_1 = (A_1, B_1)$ και $\vec{\eta}_2 = (A_2, B_2)$ δεν είναι συγγραμμικά, τότε ισοδύναμα

$$\det(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow D \neq 0, \text{ Επομένως, οι ευθείες του συστήματος (1)}$$

ε_1 και ε_2 τέμνονται. Το σημείο τομής έχει συντεταγμένες τη μοναδική λύση.

❖ Αν $D = 0$, τότε ισοδύναμα τα $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2$ είναι συγγραμμικά και επομένως, οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Οι ευθείες είτε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, είτε ταυτίζονται και έχουν άπειρα κοινά σημεία. Επομένως, όταν $D = 0$, τότε το σύστημα (1) είτε είναι αδύνατο, είτε έχει άπειρες λύσεις αντίστοιχα.

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ 3/4

Επομένως:

ΟΡΙΖΟΥΣΑ	ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ	ΛΥΣΕΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
$D \neq 0$	Οι ευθείες τέμνονται (μοναδικό κοινό σημείο)	Μοναδική λύση $x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$
$D = 0$	Οι ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο ή Οι ευθείες συμπίπτουν (άπειρα κοινά σημεία)	Αδύνατο ή Άπειρες λύσεις

- ❖ Όταν $D = 0$ και $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο.
- ❖ Όταν $D = 0$ και $D_x = D_y = 0$ τότε το σύστημα είναι αόριστο.

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ 4/4

Ασκήσεις

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $2x - 5y + 3 = 0$ και $x - 3y - 7 = 0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $4x + y = 1$. (Άσκηση Α3 παραγράφου 2.2)

[ΛΥΣΗ](#)

2. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x - y = 5$ και $\varepsilon_2: x - y + 1 = 0$. Να βρεθεί το σημείο τομής τους Μ. (Τράπεζα Θεμάτων Άσκηση 22171)

[ΛΥΣΗ](#)

3. Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $3x + 3y + k = 0$ να διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $3x + 4y + 6 = 0$ και $6x + 5y - 9 = 0$. (Άσκηση Α6 παραγράφου 2.2)

[ΛΥΣΗ](#)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

■ Ασκήσεις παραγράφου 2.2

✓ A4

✓ B3

✓ B5

❖ Η παρουσίαση και οι ασκήσεις θα ανέβουν στην ιστοσελίδα του σχολείου