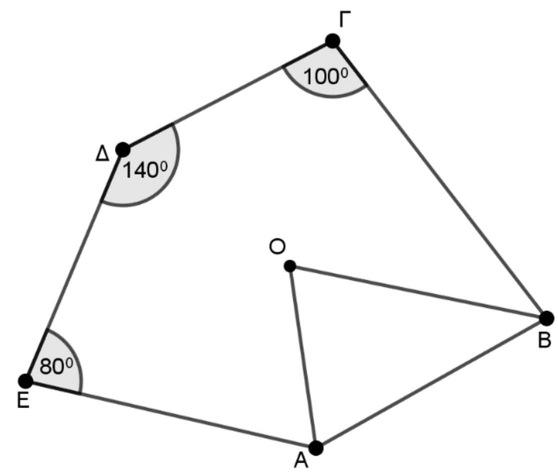
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ 4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με 100^0, η γωνία του Δ ισούται με 140^0 και η γωνία του Ε ισούται με 80^0 τότε, να υπολογίσετε:

α) το μέτρο του αθροίσματος $\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}}$.

β) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.



ΛΥΣΗ

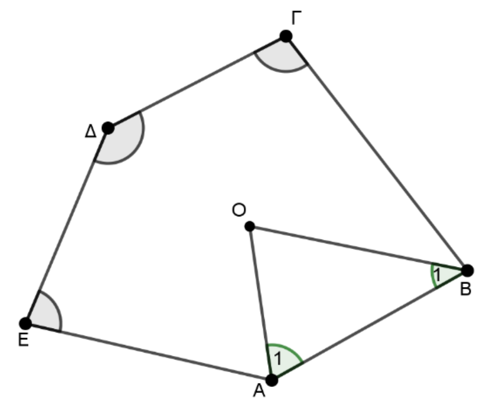
α) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με ν πλευρές είναι 2·ν-4 ορθές. Έτσι για το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ το άθροισμα των γωνιών του είναι:

2·5-4 = 10-4 = 6 ορθές ή $6 \cdot 90^0 = 540^0$.

Δηλαδή έχουμε: $\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} + \widehat{\mathrm{E}} = 540^0$ η οποία λόγω των δεδομένων γράφεται:

$\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} + 100^0 + 140^0 + 80^0 = 540^0$ οπότε $\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} = 220^0$.

β)



Στο τρίγωνο ΑΟΒ είναι: $\widehat{\mathrm{A}}_1 + \widehat{\mathrm{B}}_1 + \widehat{\mathrm{O}} = 180^0$ (1).

Όμως ΑΟ και ΒΟ είναι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β αντίστοιχα, άρα:

$\widehat{\mathrm{A}}_1 = \dfrac{\widehat{\mathrm{A}}}{2}$ και $\widehat{\mathrm{B}}_1 = \dfrac{\widehat{\mathrm{B}}}{2}$. Έτσι $\widehat{\mathrm{A}}_1 + \widehat{\mathrm{B}}_1 = \dfrac{\widehat{\mathrm{A}}}{2} + \dfrac{\widehat{\mathrm{B}}}{2} = \dfrac{\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}}}{2}$ η οποία λόγω του (α) ερωτήματος δίνει: $\widehat{\mathrm{A}}_1 + \widehat{\mathrm{B}}_1 = \dfrac{220^0}{2} = 110^0$ οπότε από την (1) παίρνουμε:

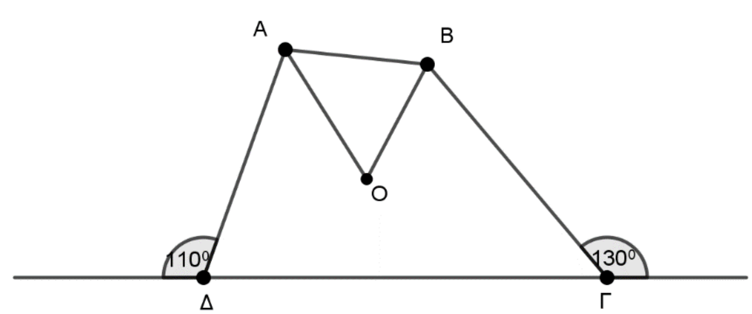
$110^0 + \widehat{\mathrm{O}} = 180^0$, επομένως $\widehat{\mathrm{O}} = 70^0$, δηλαδή $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{B} = 70^0$.

2. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η εξωτερική γωνία της Γ, ισούται με 130^0 και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110^0. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο τότε, να υπολογίσετε:

α) τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου.

β) το μέτρο του αθροίσματος $\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}}$.

γ) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.



ΛΥΣΗ

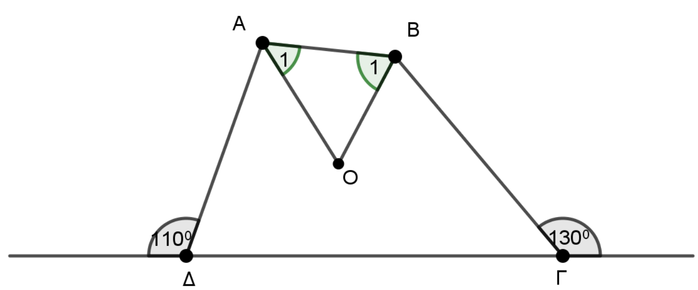
α) Έχουμε $\widehat{\Gamma}_{εξ} = 130^0$, $\widehat{\Delta}_{εξ} = 110^0$. Όμως $\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma}_{εξ} = 180^0$ ή $\widehat{\Gamma} + 130^0 = 180^0$ άρα $\widehat{\Gamma} = 50^0$.

Επίσης $\widehat{\Delta} + \widehat{\Delta}_{εξ} = 180^0$ ή $\widehat{\Delta} + 110^0 = 180^0$ άρα $\widehat{\Delta} = 70^0$.

β) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με ν πλευρές είναι 2·ν-4 ορθές. Έτσι για το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, το άθροισμα των γωνιών του είναι:

$2 \cdot 4 - 4 = 8 - 4 = 4$ ορθές ή $4 \cdot 90^0 = 360^0$. Δηλαδή έχουμε: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 360^0$ η οποία λόγω του (α) ερωτήματος γράφεται: $\widehat{A} + \widehat{B} + 50^0 + 70^0 = 360^0$ οπότε $\widehat{A} + \widehat{B} = 240^0$.

γ)



Στο τρίγωνο ΑΟΒ είναι: $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{O} = 180^0$ (1).

Όμως ΑΟ και ΒΟ είναι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β αντίστοιχα, άρα:

$\widehat{A}_1 = \dfrac{\widehat{A}}{2}$ και $\widehat{B}_1 = \dfrac{\widehat{B}}{2}$ **.** Έτσι $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = \dfrac{\widehat{A}}{2} + \dfrac{\widehat{B}}{2} = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$ η οποία λόγω του (β) ερωτήματος γράφεται: $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = \dfrac{240^0}{2}$ $= 120^0$ οπότε από την (1) παίρνουμε:

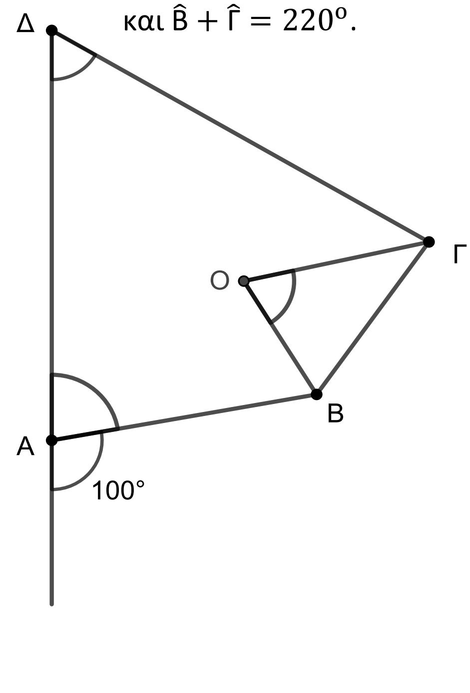
$120^0 + \widehat{O} = 180^0$, επομένως $\widehat{O} = 60^0$, δηλαδή $A\widehat{O}B = 60^0$.

3. Θεωρούμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος με $\widehat{A}_{εξ} = 100^o$ και $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 220^o$.

Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ τέμνονται στο Ο, τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Delta}$ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

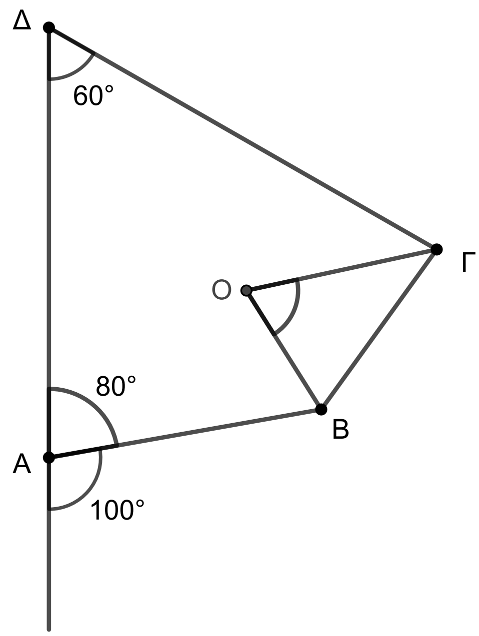
β) Να αποδείξετε ότι $B\widehat{O}\Gamma = 70^o$.



ΛΥΣΗ

Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\widehat{A}_{\varepsilon\xi} = 100^o$ και $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 220^o$. Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ο.

α)



Για τις γωνίες $\widehat{A}_{\varepsilon\xi}$ και $\widehat{A}$ ισχύει:

$\widehat{A}_{\varepsilon\xi} + \widehat{A} = 180^o$ ή $100^o + \widehat{A} = 180^o$.

Άρα, $\widehat{A} = 180^o - 100^o = 80^o$.

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 360^o$ ή $80^o + 220^o + \widehat{\Delta} = 360^o$.

Άρα, $\widehat{\Delta} = 360^o - 80^o - 220^o = 60^o$.

β) Στο τρίγωνο ΒΓΟ ισχύει:

$$O\widehat{B}\Gamma + B\widehat{\Gamma}O + B\widehat{O}\Gamma = 180^o \quad (1)$$

Όμως

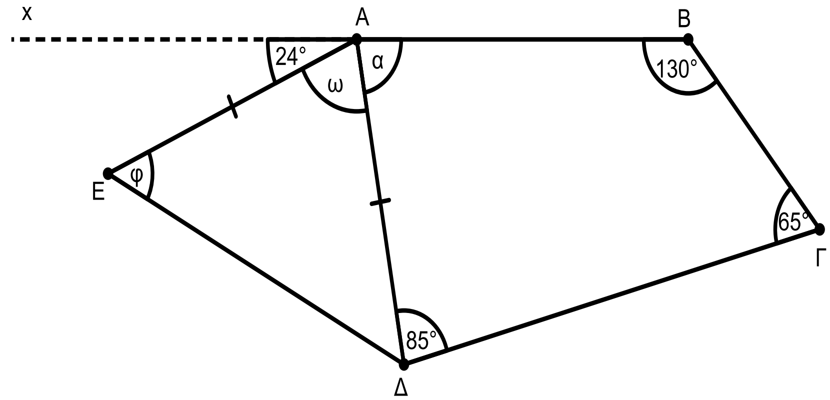
$$O\widehat{B}\Gamma + B\widehat{\Gamma}O = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \frac{\widehat{B} + \widehat{\Gamma}}{2} = \frac{220^o}{2} = 110^o$$

Οπότε, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$110^o + B\widehat{O}\Gamma = 180^o$$

Άρα, $B\widehat{O}\Gamma = 180^o - 110^o = 70^o$.

4. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔΕ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος ΑΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ και η ημιευθεία Αx είναι προέκταση της ΒΑ προς το Α. Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

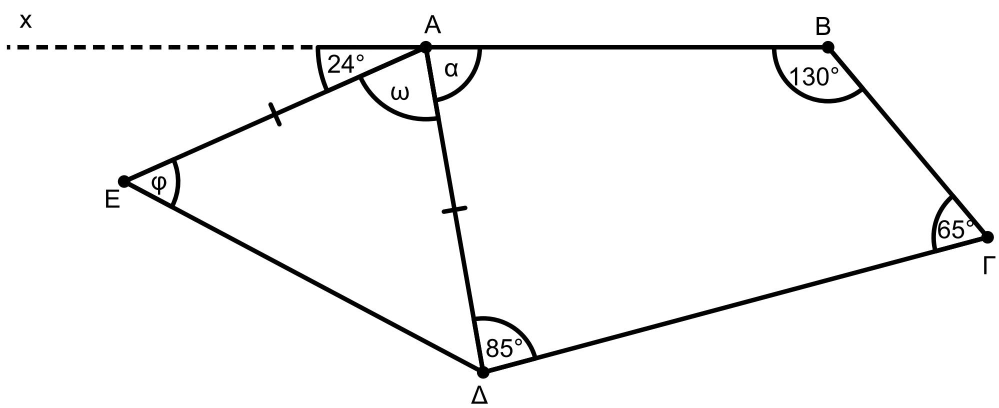


α)Τη γωνία $\widehat{\alpha}$.

β) Τη γωνία $\widehat{\omega}$.

γ) Τη γωνία $\widehat{\varphi}$.

ΛΥΣΗ



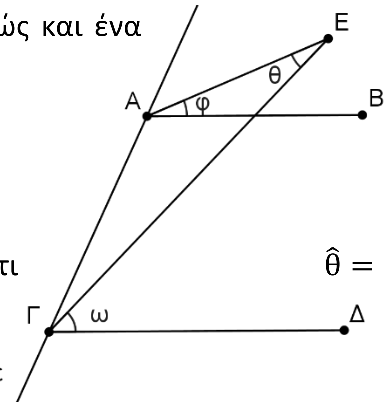
α) Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου ισούται με 360^o, οπότε επειδή η γωνία $\widehat{\alpha}$ είναι η $4^η$ γωνία του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ έχουμε:

$\widehat{\alpha} + 130^o + 65^o + 85^o = 360^o$ ή $\widehat{\alpha} = 360^o - 280^o$. Άρα $\widehat{\alpha} = 80^o$.

β) Η γωνία των 24^o με τη γωνία $\widehat{\omega}$ και τη γωνία $\widehat{\alpha}$ που υπολογίσαμε στο α) ερώτημα σχηματίζουν ευθεία γωνία. Άρα $24^o + \widehat{\omega} + \widehat{\alpha} = 180^o$ ή $24^o + \widehat{\omega} + 80^o = 180^o$. Άρα $\widehat{\omega} = 76^o$.

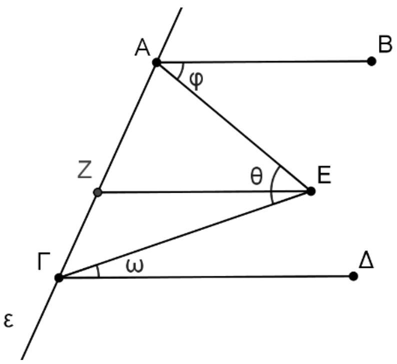
γ) Η διαγώνιος ΑΔ του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ, άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΕΔ. Η γωνία $\widehat{\varphi}$ είναι ίση με τη γωνία $A\widehat{\Delta}E$, ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΕ, του οποίου η γωνία της κορυφής είναι η $\widehat{\omega}$ με $\widehat{\omega} = 76^o$ από το β) ερώτημα. Επομένως $\widehat{\varphi} = \frac{180° - \omega}{2} = \frac{180° - 76°}{2} = 52^o$.

5. Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα ΑΒ και ΓΔ καθώς και ένα τυχαίο σημείο Ε βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε.



α) Αν το Ε είναι εκτός των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ, τότε να αποδείξετε ότι $\widehat{\omega} = \widehat{\varphi} + \widehat{\theta}$.

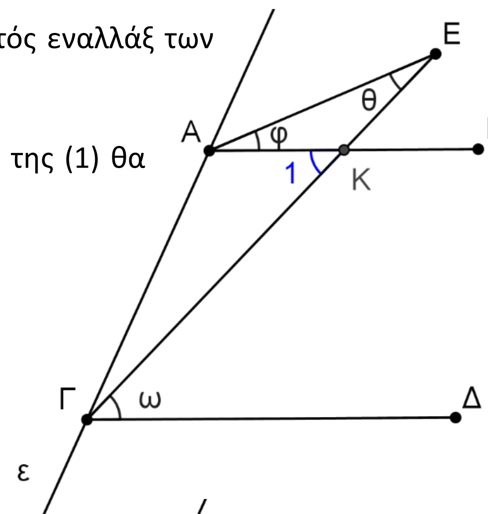
β) Αν το Ε είναι ανάμεσα στα τμήματα ΑΒ και ΓΔ και ΕΖ//ΑΒ, τότε να αποδείξετε ότι $\widehat{\theta} = \widehat{\omega} + \widehat{\varphi}$.



ΛΥΣΗ

α) Έστω Κ το σημείο τομής των ΕΓ και ΑΒ. Είναι $\widehat{K}_1 = \widehat{\omega}$ (1) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΕΓ.

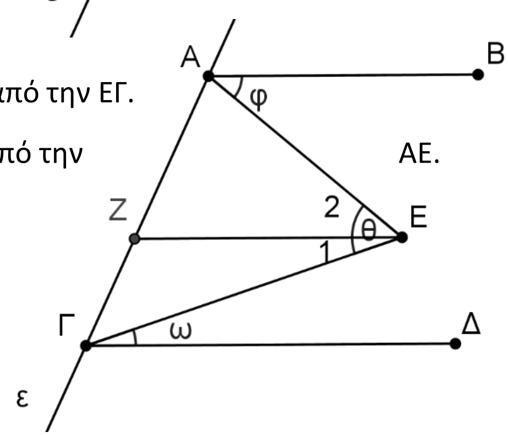
Η γωνία $\widehat{K}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΚΕ, οπότε $\widehat{K}_1 = \widehat{\theta} + \widehat{\varphi}$ και λόγω της (1) θα προκύπτει ότι $\widehat{\omega} = \widehat{\varphi} + \widehat{\theta}$.



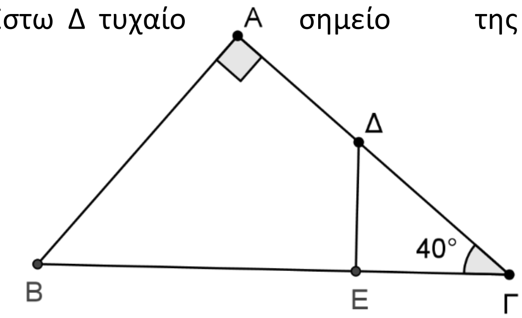
β) Είναι $\widehat{\omega} = \widehat{E}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ, ΓΔ που τέμνονται από την ΕΓ.

Επίσης $\widehat{\varphi} = \widehat{E}_2$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΕΖ που τέμνονται από την ΑΕ.

Τότε $\widehat{\varphi} + \widehat{\omega} = \widehat{E}_2 + \widehat{E}_1$, όμως $\widehat{E}_2 + \widehat{E}_1 = Α\widehat{E}Γ = \widehat{\theta}$, άρα $\widehat{\varphi} + \widehat{\omega} = \widehat{\theta}$.



6. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με $\hat{\Gamma} = 40^0$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΓ και $\Delta\mathrm{E} \perp \mathrm{B}\Gamma$.



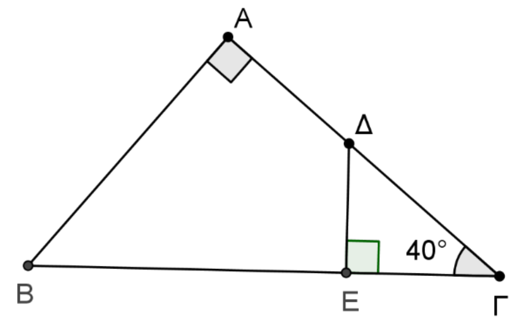
Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ,

β) τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΔΕΒ

ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΔΕ⊥ΒΓ είναι $\Delta\hat{E}\Gamma = 90^o$



Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΔΕΓ έχουμε:

$$E\hat{\Delta}\Gamma + \Delta\hat{E}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^o \text{ ή } E\hat{\Delta}\Gamma + 90^o + 40^o = 180^o \text{ ή } E\hat{\Delta}\Gamma = 50^o$$

β) Είναι $\hat{A} = \hat{E} = 90^o$.

Οι γωνίες $A\hat{\Delta}E$ και $E\hat{\Delta}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές οπότε:

$$A\hat{\Delta}E + E\hat{\Delta}\Gamma = 180^o \text{ ή } A\hat{\Delta}E + 50^o = 180^o \text{ ή } A\hat{\Delta}E = 130^o$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \text{ ή } 90^o + \hat{B} + 40^o = 180^o \text{ ή } \hat{B} = 50^o$$

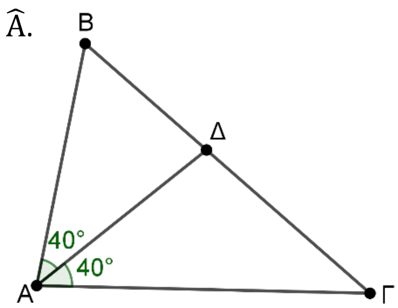
7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 80°$ και $\hat{B} = 20° + \hat{\Gamma}$, και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

β) Φέρουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{\Delta}E$ και $E\hat{\Delta}\Gamma$.

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 80°$ και $\hat{B} = 20° + \hat{\Gamma}$, η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας του $\hat{A}$.



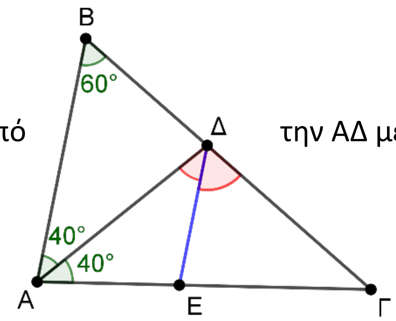
α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \text{ ή } 80^o + 20^o + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^o \text{ ή } 2\hat{\Gamma} = 80^o \text{ ή } \hat{\Gamma} = 40^o$$

Άρα $\hat{B} = 20^o + \hat{\Gamma} = 20^o + 40^o = 60^o$.

β) Αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$, θα ισχύει ότι $B\widehat{A}\Delta = \Gamma\widehat{A}\Delta = \frac{\widehat{A}}{2} = 40^{o}$ (1).

Φέρνουμε την ΔΕ // ΑΒ.



Είναι $E\widehat{\Delta}A = B\widehat{A}\Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΑΒ που τέμνονται από την ΑΔ με $B\widehat{A}\Delta = 40^{o}$ από τη σχέση (1), άρα $E\widehat{\Delta}A = 40^{o}$.

Επίσης $E\widehat{\Delta}\Gamma = \widehat{B}$ ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΑΒ που τέμνονται από την ΒΓ με $\widehat{B} = 60^{o}$ από το α) ερώτημα, άρα $E\widehat{\Delta}\Gamma = 60^{o}$.