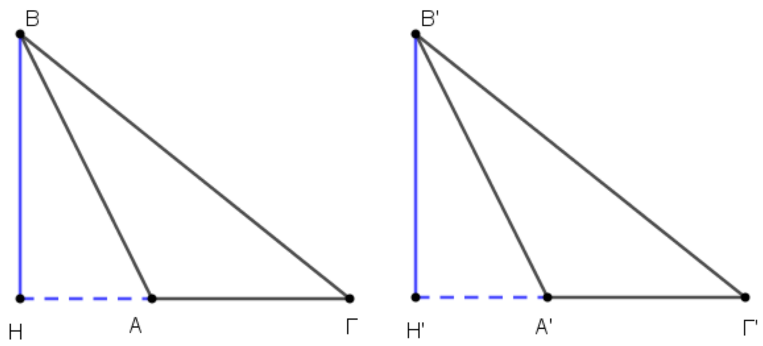
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΣΧΑ

1. Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ ($\widehat{A} > 90^o$) και Α΄Β΄Γ΄ ($\widehat{A}' > 90^o$) με γ = γ΄ και β = β΄. Αν τα ύψη ΒΗ και Β΄Η΄ των τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

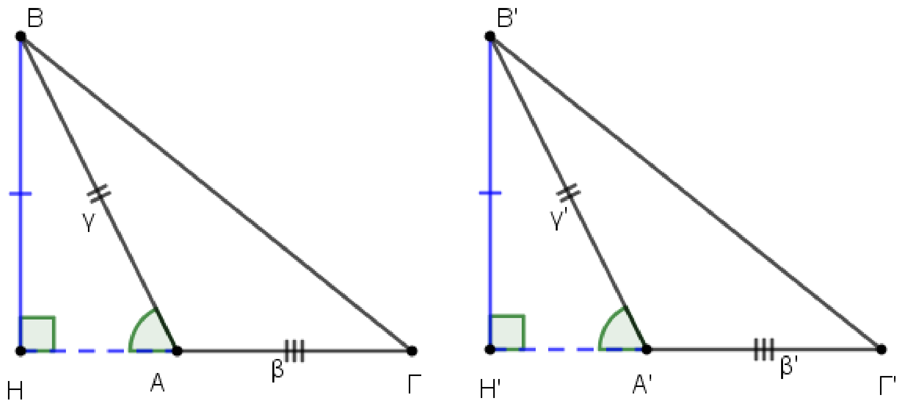
α) $B\widehat{A}H = B'\widehat{A}'H'$.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.



ΛΥΣΗ

Έστω τα αμβλυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ ($\widehat{A} > 90^o$) και Α΄Β΄Γ΄ ($\widehat{A}' > 90^o$) με γ = γ΄, β = β΄ και $BH = B'H'$.



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΗΑ και Β΄Η΄Α΄. Αυτά έχουν:

$BH = B'H'$, από υπόθεση

γ = γ΄, από υπόθεση

$\widehat{H} = \widehat{H}'$= 90° (τα ΒΗ και Β΄Η΄ είναι ύψη, άρα κάθετα στον φορέα της ΑΓ και της Α΄Γ΄.

Επομένως είναι ίσα, επειδή είναι ορθογώνια και έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

Άρα και οι γωνίες που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΗ και Β΄Η΄ είναι ίσες, δηλαδή $B\widehat{A}H = B'\,\widehat{A}'H'$ (1).

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ. Αυτά έχουν:

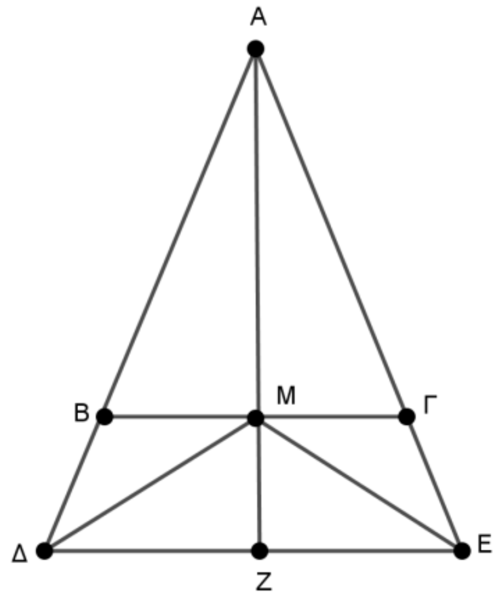
γ = γ΄, από υπόθεση

β = β΄, από υπόθεση

$B\widehat{A}\Gamma = B'\widehat{A}'\Gamma'$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $B\widehat{A}H$ και $B'\,\widehat{A}'H'$ αντίστοιχα από τη σχέση (1).

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ είναι το μέσο της βάσης ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ, ΓΕ αντίστοιχα ώστε ΒΔ=ΓΕ.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ.

γ) Αν η ΑΜ τέμνει την ΔΕ στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι η ΑΖ είναι κάθετη στην ΔΕ.

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ έχουν:

- ΜΒ = ΜΓ, το Μ είναι μέσο της ΒΓ
- ΒΔ = ΓΕ, από υπόθεση
- $\mathrm{M}\widehat{\mathrm{B}}\Delta$ = $\mathrm{M}\widehat{\Gamma}\mathrm{E}$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών Β και Γ

άρα τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα (ΠΓΠ).

β) Λόγω του (α) είναι ΜΔ = ΜΕ, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\mathrm{M}\widehat{\mathrm{B}}\Delta$ και $\mathrm{M}\widehat{\Gamma}\mathrm{E}$ των ίσων τριγώνων ΜΒΔ και ΜΓΕ αντίστοιχα. Επομένως το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε οι γωνίες της βάσης του ΜΔΕ και ΜΕΔ είναι ίσες.

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος άρα και διχοτόμος.

Επίσης ΑΔ = ΑΒ + ΒΔ και ΑΕ = ΑΓ +ΓΕ, οπότε ΑΔ=ΑΕ ως άθροισμα ίσων τμημάτων. Έτσι στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΕ, η ΑΖ ως διχοτόμος θα είναι και ύψος.

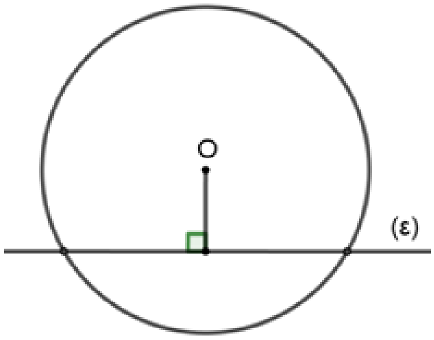
Άρα η ΑΖ είναι κάθετη στην ΔΕ.

3. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα $\rho = 6$. Έστω d η απόσταση του κέντρου Ο του κύκλου από μια ευθεία (ε). Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:

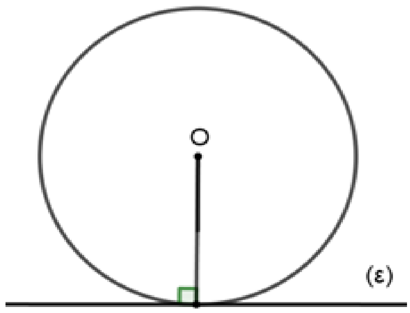
α) $d = 3$, β) $d = 6$, γ) $d = 9$

ΛΥΣΗ

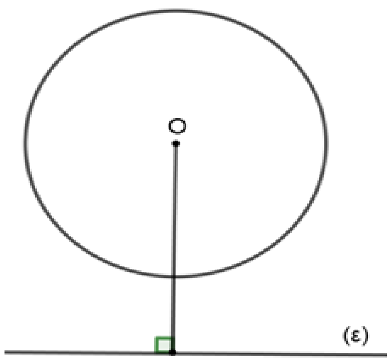
α) Επειδή η απόσταση $d = 3$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μικρότερη από την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι τέμνουσα του κύκλου.



β) Επειδή η απόσταση $d = 6$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι ίση με την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, δηλαδή είναι εφαπτόμενη του κύκλου.



γ) Επειδή η απόσταση $d = 9$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι εξωτερική του κύκλου.



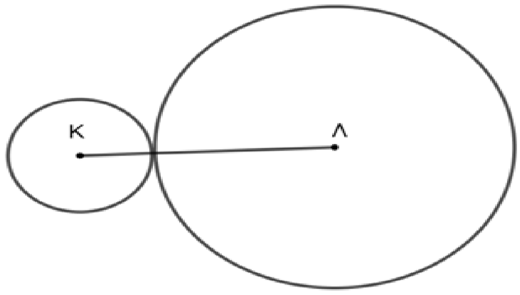
4. Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,2) και (Λ,5). α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά. γ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν ο κύκλος (Κ,2) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (Λ,5); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. δ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΛΥΣΗ

Έστω R = 5 και ρ = 2.

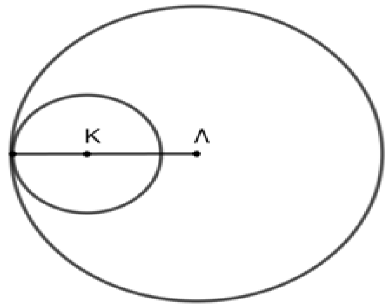
α) Αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, τότε για τη διάκεντρο ΚΛ έχουμε :

ΚΛ = R + ρ = 5 + 2 = 7.

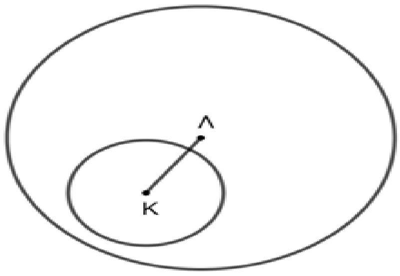


β) Αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, τότε για τη διάκεντρο ΚΛ έχουμε :

ΚΛ = R - ρ = 5 - 2 = 3.

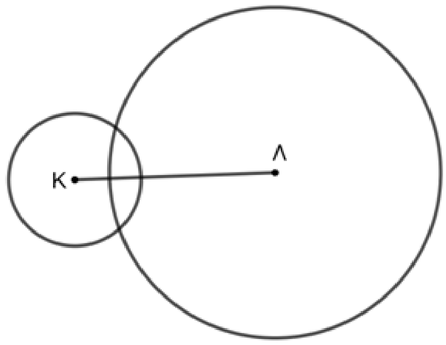


γ) Για να είναι ο κύκλος (Κ,2) στο εσωτερικό του κύκλου (Λ,5) θα πρέπει ΚΛ < R –ρ, δηλαδή ΚΛ < 5- 2 ή ΚΛ < 3.

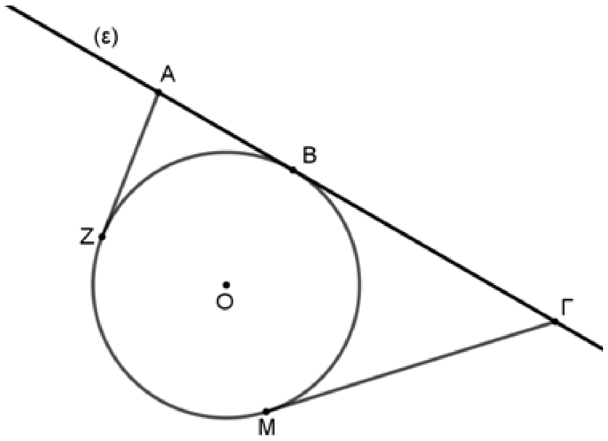


δ) Για να τέμνονται οι κύκλοι θα πρέπει R- ρ < ΚΛ < R + ρ, δηλαδή 5 – 2 < ΚΛ < 5 + 2 ή

3 < ΚΛ < 7.



5. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Β του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε). Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία Α και Γ εκατέρωθεν του Β έτσι ώστε ΒΑ < ΒΓ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΖ και ΓΜ στον κύκλο.



α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = ΑΖ + ΜΓ.

ΛΥΣΗ

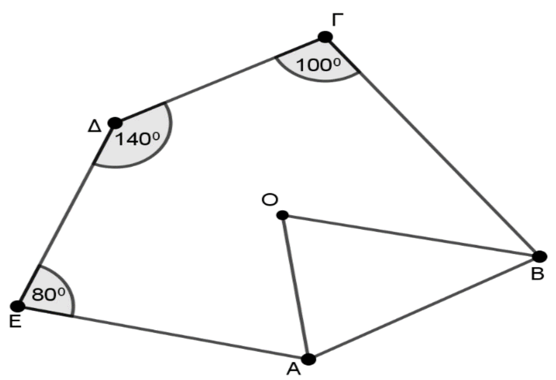
α) Από τα δεδομένα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΖ είναι εφαπτόμενα στον κύκλο από σημείο εκτός αυτού, άρα είναι ίσα, δηλαδή ΑΒ = ΑΖ. Όμοια από το σημείο Γ που είναι εκτός του κύκλου τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΒ,ΓΜ είναι εφαπτόμενα σε αυτόν, άρα ΓΒ =ΓΜ

β) Λόγω του ερωτήματος (α) έχουμε ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ = ΑΖ + ΜΓ.

6. Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με 100^0, η γωνία του Δ ισούται με 140^0 και η γωνία του Ε ισούται με 80^0 τότε, να υπολογίσετε:

α) το μέτρο του αθροίσματος $\widehat{A} + \widehat{B}$.

β) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.



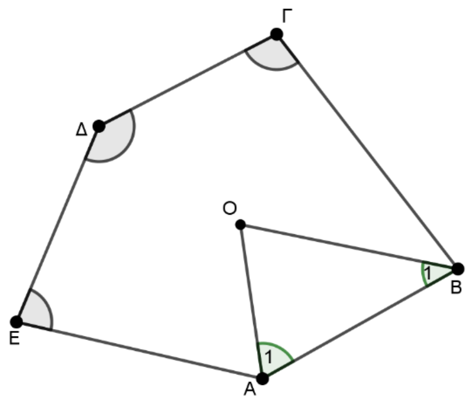
ΛΥΣΗ

α) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με ν πλευρές είναι 2·ν-4 ορθές. Έτσι για το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ το άθροισμα των γωνιών του είναι:

$2\cdot5-4 = 10-4 = 6$ ορθές ή $6\cdot90^0 = 540^0$.

Δηλαδή έχουμε: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} + \widehat{E} = 540^0$ η οποία λόγω των δεδομένων γράφεται:

$\widehat{A} + \widehat{B} + 100^0 + 140^0 + 80^0 = 540^0$ οπότε $\widehat{A} + \widehat{B} = 220^0$.



β) Στο τρίγωνο ΑΟΒ είναι: $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{O} = 180^0$ (1).

Όμως ΑΟ και ΒΟ είναι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β αντίστοιχα, άρα:

$\widehat{A}_1 = \dfrac{\widehat{A}}{2}$ και $\widehat{B}_1 = \dfrac{\widehat{B}}{2}$. Έτσι $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = \dfrac{\widehat{A}}{2} + \dfrac{\widehat{B}}{2} = \dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}$ η οποία λόγω του (α) ερωτήματος δίνει: $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = \dfrac{220^0}{2}$ $= 110^0$ οπότε από την (1) παίρνουμε:

$110^0 + \widehat{O} = 180^0$, επομένως $\widehat{O} = 70^0$, δηλαδή $A\widehat{O}B = 70^0$.

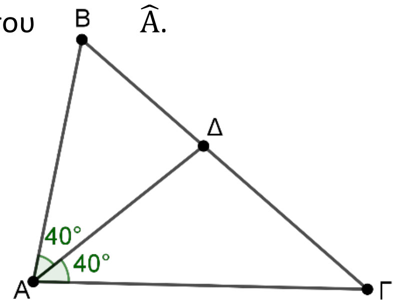
7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}} = 80°$ και $\widehat{\mathrm{B}} = 20° + \widehat{\Gamma}$, και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$.

β) Φέρουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{E}$ και $\mathrm{E}\widehat{\Delta}\Gamma$.

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}} = 80°$ και $\widehat{\mathrm{B}} = 20° + \widehat{\Gamma}$, η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας του $\widehat{\mathrm{A}}$.



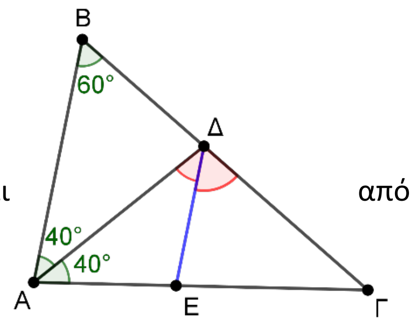
α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} = 180^o$ ή $80^o + 20^o + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 180^o$ ή $2\widehat{\Gamma} = 80^o$ ή $\widehat{\Gamma} = 40^o$

Άρα $\widehat{\mathrm{B}} = 20^o + \widehat{\Gamma} = 20^o + 40^o = 60^o$.

β) Αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$, θα ισχύει ότι $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta = \Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta = \frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2}$ $= 40^o$ (1).

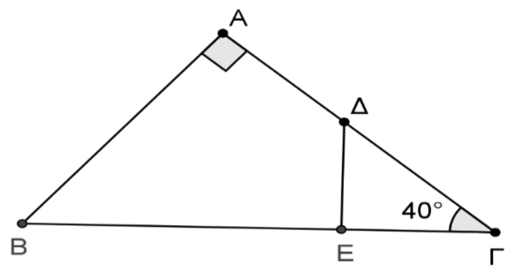
Φέρνουμε την ΔΕ // ΑΒ.



Είναι $\mathrm{E}\widehat{\Delta}\mathrm{A} = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΑΒ που τέμνονται από την ΑΔ με $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta = 40^o$ από τη σχέση (1), άρα $\mathrm{E}\widehat{\Delta}\mathrm{A} = 40^o$.

Επίσης $\mathrm{E}\widehat{\Delta}\Gamma = \widehat{\mathrm{B}}$ ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΑΒ που τέμνονται από την ΒΓ με $\widehat{\mathrm{B}} = 60^o$ από το α) ερώτημα, άρα $\mathrm{E}\widehat{\Delta}\Gamma = 60^o$.

8. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με $\hat{\Gamma} = 40^0$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΓ και $\Delta E \perp B\Gamma$.



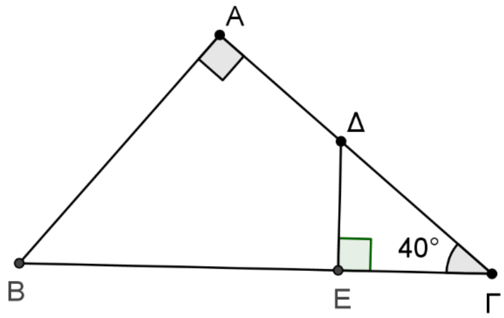
Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ,

β) τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΔΕΒ

ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΔΕ⊥ΒΓ είναι $\Delta\hat{E}\Gamma = 90^o$



Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΔΕΓ έχουμε:

$$E\widehat{\Delta}\Gamma + \Delta\hat{E}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^o \text{ ή } E\widehat{\Delta}\Gamma + 90^o + 40^o = 180^o \text{ ή } E\widehat{\Delta}\Gamma = 50^o$$

β) Είναι $\hat{A} = \hat{E} = 90^o$.

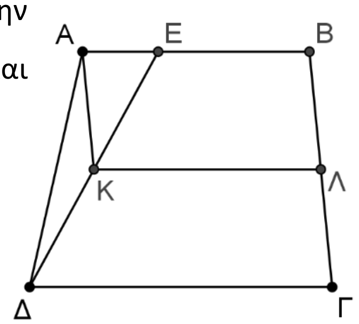
Οι γωνίες $A\widehat{\Delta}E$ και $E\widehat{\Delta}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές οπότε:

$$A\widehat{\Delta}E + E\widehat{\Delta}\Gamma = 180^o \text{ ή } A\widehat{\Delta}E + 50^o = 180^o \text{ ή } A\widehat{\Delta}E = 130^o$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$ ή $90^o + \hat{B} + 40^o = 180^o$ ή $\hat{B} = 50^o$

9. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ=3, ΓΔ=4. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΒ ώστε ΑΕ=1. Στο τραπέζιο ΕΒΓΔ θεωρούμε τα Κ και Λ, μέσα των ΕΔ και ΒΓ αντίστοιχα



α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΚΛ του τραπεζίου ΕΒΓΔ.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.

ΛΥΣΗ

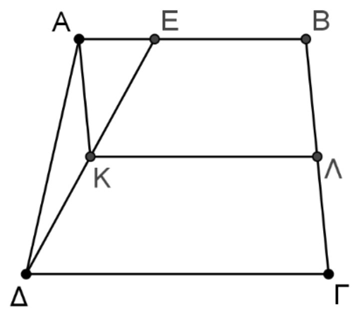
α) Είναι ΕΒ = ΑΒ – ΑΕ = 3 – 1 = 2. Επειδή ΚΛ διάμεσος του τραπεζίου ΕΒΓΔ έχουμε:

$$ΚΛ = \frac{ΕΒ+ΓΔ}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$$

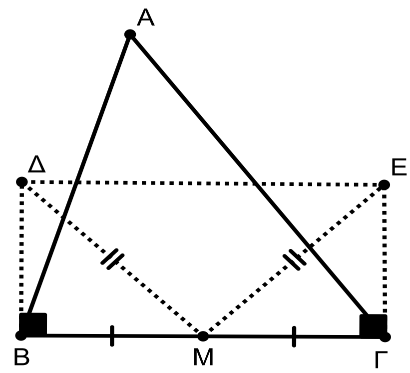
β) Επειδή ΚΛ διάμεσος του τραπεζίου ΕΒΓΔ ισχύει ότι:

ΚΛ // ΕΒ ή ΚΛ // ΑΒ και ΚΛ = 3 = ΑΒ

Οπότε στο τετράπλευρο ΑΒΛΚ οι απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΚΛ είναι ίσες και παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.



10. Στο σχήμα που ακολουθεί, το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, και τα τμήματα ΒΔ και ΕΓ είναι κάθετα στη ΒΓ στα σημεία Β, Γ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΜΔ = ΜΕ. Να αποδείξετε ότι:



α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ

β) το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

ΛΥΣΗ

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΓΕ έχουν:

- ΜΒ = ΜΓ, διότι το Μ είναι μέσο του ΒΓ
- ΜΔ = ΜΕ, από υπόθεση.

Άρα τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΓΕ είναι ίσα γιατί ως ορθογώνια έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Επομένως θα έχουν ίσες και τις τρίτες τους πλευρές, δηλαδή θα είναι ΒΔ = ΓΕ.

β) Τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ ανήκουν στις κάθετες στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, οπότε θα είναι κάθετα στη ΒΓ, άρα θα είναι παράλληλα μεταξύ τους (ΒΔ // ΓΕ) ως κάθετα τμήματα στην ίδια ευθεία ΒΓ. Επίσης από το α) ερώτημα ισχύει ότι ΒΔ = ΓΕ.

Οπότε το τετράπλευρο ΒΔΕΓ έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΒΔ και ΓΕ, παράλληλες και ίσες άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή είναι $\Delta\widehat{B}\Gamma = 90^o$, τότε το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ορθογώνιο γιατί είναι παραλληλόγραμμο με μια ορθή γωνία.